

**Robotics: Control, Sensing, Vision,  
and Intelligence**

**K. S. Fu**  
School of Electrical Engineering  
Purdue University

**R. C. Gonzalez**  
Department of Electrical Engineering  
University of Tennessee  
and  
Perceptics Corporation  
Knoxville, Tennessee

**C. S. G. Lee**  
School of Electrical Engineering  
Purdue University

McGraw—Hill Book Company  
New York St. Louis San Francisco Auckland Bogotá  
Hamburg London Madrid Mexico Milan Montreal New Delhi  
Panama Paris São Paulo Singapore Sydney Tokyo Toronto

*К.Фу, Р.Гонсалес, К.Ли*

# **РОБОТО- ТЕХНИКА**

Перевод с английского  
канд. техн. наук А. А. Сорокина, А. В. Градецкого  
и канд. техн. наук М. Ю. Рачкова

под редакцией  
д-ра техн. наук В. Г. Градецкого



Москва «Мир» 1989

ББК 32.816

Ф94

УДК 681.5

Фу К., Гонсалес Р., Ли К.

Ф94 Робототехника: Пер. с англ.— М.: Мир, 1989.— 624 с., ил.  
ISBN 5-03-000805-5

В книге известных американских ученых систематически излагаются последние достижения в области кинематики, динамики, систем управления и очувствления и программного обеспечения промышленных манипуляционных роботов типа Пума. Рассматриваются способы планирования траектории движения манипулятора, повышения точности, улучшения динамических характеристик при использовании систем технического зрения, средств адаптации и элементов искусственного интеллекта.

Для инженеров, занимающихся робототехникой, студентов старших курсов соответствующих специальностей вузов.

ББК 32.816

Редакция литературы по информатике и робототехнике

ISBN 5-03-000805-5 (русск.)  
ISBN 0-07-022625-3 (англ.)

© 1987 by McGraw-Hill, Inc.  
© перевод на русский язык, «Мир», 1989

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Стремительное развитие робототехники за последнюю четверть века существенно обогатило технический прогресс и предоставило человечеству новые средства автоматизации — промышленные роботы, применяемые в качестве транспортных средств, технологических машин и элементов гибких систем комплексной автоматизации. Фундаментальные идеи робототехники основываются на новейших достижениях в области теоретической и прикладной механики, электроники, вычислительной техники, технологии, теории управления.

Интенсивному развитию робототехники сопутствуют публикации по конкретным отдельным достижениям и обобщающие монографии, хотя создание последних требует значительного теоретического, практического и педагогического опыта. К числу таких обобщающих многоплановых публикаций относится данная книга, которая отражает опыт исследований по кинематике, динамике, системам управления и очувствления и по программному обеспечению промышленных манипуляционных антропоморфных роботов типа Пума. Отечественным аналогом является робот РМ-01. Монография отличается от других книг по этой тематике систематичностью изложения, общностью подходов и методов, что позволяет использовать ее и как учебное пособие. Среди отечественных и зарубежных книг по робототехнике лишь немногие могут претендовать на подобное обобщение и служить учебниками.

Основное внимание авторы уделили рассмотрению робота как управляемой механической системы. Читатель получает возможность проследить все основные этапы конструирования робота — от кинематики и динамики до систем управления, программирования и придания роботам некоторых свойств искусственного интеллекта.

Авторы постепенно вводят читателя в курс основных проблем по механике и управлению антропоморфными

манипуляционными роботами. От подробного изложения основ кинематики и динамики авторы переходят к планированию траекторий движения манипулятора, затем к построению комбинированных по положению и силе систем управления, в том числе адаптивных. Рассмотрены различные способы планирования траектории манипулятора при отсутствии и наличии препятствий на пути его движения. Подробно описаны проблемы увеличения точности с помощью интерполяции траектории полиномами и выбором опорных точек, в которых производится коррекция параметров движения. Большое внимание уделяется системам низкого и высокого уровней технического зрения, программному обеспечению и языкам программирования роботов, экспертным системам в связи с разработкой элементов искусственного интеллекта, решению проблем обучения и планирования задач.

Авторы использовали обширный литературный материал, в основном американские, английские и японские работы. Некоторые отечественные публикации по этим вопросам мы приводим ниже в качестве дополнительной литературы.

Материал данной книги изложен достаточно полно и доступно. Основные теоретические положения иллюстрируются большим числом тщательно подобранных примеров, пользуясь которыми читатель может глубже понять и усвоить прочитанное. Монография написана простым и ясным языком, в чем проявился большой педагогический опыт авторов, снабжена хорошими четко выполненными иллюстрациями.

Книга представляет интерес для специалистов и рассчитана на научных сотрудников, преподавателей, инженеров, аспирантов, а также студентов, интересующихся проблемами робототехники и автоматизации производства. Перевод книги выполнили А. А. Сорокин (гл. 1—4, предисловие), М. Ю. Рачков (гл. 5—7, приложение), А. В. Градецкий (гл. 8—10).

*В. Г. Градецкий*

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Робототехника и гибкие производственные системы: Проблемы создания гибких автоматических производств./Под ред. академиков И. М. Макарова, К. В. Фролова, чл.-корр. АН СССР П. Н. Белянина. — М.: Наука, 1987.
2. Научные основы робототехники./Под ред. чл.-корр. АН СССР Д. Е. Охотимского и чл.-корр. АН СССР Е. М. Попова. — М.: Наука, 1987.
3. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы: Динамика и алгоритмы. — М.: Наука, 1978.
4. Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С. Системы управления манипуляционных роботов. — М.: Наука, 1978.
5. Кулешов В. С., Лакота Н. А. Динамика систем управления манипуляторами. — М.: Энергия, 1971.
6. Промышленная робототехника./Под ред. Я. А. Шифрина. — М.: Машиностроение, 1983.
7. Тимченко В. А., Сухомлин А. А. Роботизация сварочного производства. — К.: Техника, 1988.
8. Пашков Е. В., Погорелов Б. В., Карлов А. Г. и др. Робототехнические системы в сборочном производстве. — К.: Вища школа, 1987.
9. Костюк В. И., Гавриш А. П., Ямпольский Л. С., Карлов А. Г. Промышленные роботы: Конструирование, управление, эксплуатация. — К.: Вища школа, 1985.
10. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: Динамика, управление, оптимизация. — М.: Наука, 1989.

Посвящается Виоле, Конни и Пэй-Лин

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана с целью предоставить инженерам, ученым и учащимся (связанным по роду своей деятельности с робототехникой) всестороннее, систематическое и современное изложение принципиальных вопросов, лежащих в основе конструирования, анализа и синтеза робототехнических систем.

Начало развития робототехники можно отнести к середине 40-х годов, когда в Окриджской и Аргоннской национальных лабораториях были сконструированы и собраны манипуляторы копирующего типа, предназначенные для работы с радиоактивными веществами. Первый промышленный робот, управляемый с помощью компьютера, был создан фирмой Юнимейшн в конце 50-х годов. В течение следующих 15 лет появился целый ряд промышленных и экспериментальных устройств этого типа. Несмотря на доступность технологии изготовления и применения роботов, широкий интерес к робототехнике как самостоятельной области исследований проявился сравнительно недавно, что объясняется значительным отставанием производства в большинстве промышленных стран.

Робототехника представляет собой область знания, лежащую на стыке различных дисциплин. Она включает как вопросы конструирования отдельных механических и электрических узлов, так и технологию построения системы очувствления, вопросы применения компьютеров, проблемы искусственного интеллекта. Основная масса материалов, касающихся теоретических основ, вопросов конструирования и приложений робототехники, разбросана по многочисленным техническим журналам, материалам конференций, исследовательским работам и книгам, в которых либо рассматриваются специальные вопросы робототехники, либо дается краткий обзор исследований в этой области. В связи с этим трудно, особенно для новичка, изучить круг вопросов, составляющих основу предмета. Данная книга представляет собой попытку последовательно из-

ложить основные методы и принципы робототехники. Тем самым предлагаемая книга может использоваться и как учебное пособие, и как справочник. Студенты найдут в ней логически связанное обсуждение основных понятий и наиболее важных методов. Для инженеров и ученых эта книга может служить готовым справочником, поскольку в ней систематизированы понятия и методы робототехники.

Математический уровень изложения материала книги предполагает знакомство читателя с основами теории матриц, теории вероятностей, программирования и математического анализа. Основное внимание уделено выводу фундаментальных результатов, базирующемуся на первичных понятиях и представлениях. По ходу изложения приводятся многочисленные примеры. В конце каждой главы даются задачи разных типов и уровней сложности. Некоторые из этих задач позволят читателю в процессе их решения глубже понять излагаемый в книге материал. Другие служат как бы дополнением и расширением затронутого круга вопросов.

Предлагаемая книга была создана на основе материалов лекций, которые ее авторы читали в университетах в Пэрдью (Purdue), Теннесси (Tennessee) и Мичигане (Michigan). Материал был тщательно отработан в процессе семинарских занятий и при чтении всеми авторами многочисленных кратких курсов в течение пятилетнего периода. На характер изложения материала в книге существенное влияние оказали замечания и предложения студентов, слушавших эти курсы.

Авторы книги выражают признательность всем, кто прямо или косвенно содействовал подготовке ее текста. В особенности нам бы хотелось поблагодарить профессоров В. Л. Грина, Г. Н. Саридиса, Р. Б. Кэлли, Я. И. С. Лу, Н. К. Ло, В. Т. Снайтера, Д. Бржаковича, Е. Г. Бурдэ, М. Я. Чунга, В. Х. Ли, а также докторов О. Е. Вудса, С. Дугласа, А. К. Бьецци, С. Дэя, Ф. Кинга и Л.-В. Тзая. Неоспоримо также, что за последние пять лет, проведенные нами в университетской среде, студенты оказали влияние не только на наши мысли, но и на развитие вопросов, затронутых в этой книге. Нам бы хотелось отметить здесь тех студентов, которые работали вместе с нами в процессе выполнения своих выпускных и преддипломных исследований. Это Д. А. Херрера, М. А. Абиди, Р. О. Иасон, Р. Сафабакш, А. П. Перец, К. Х. Хайден, Д. Р. Кэйт, К. А. Райнхарт, Н. Алвертос, Е. Р. Мейер, П. Р. Чанг, К. Л. Чен, С. Х. Хоу, Г. Х. Ли, Р. Джангклае, Хуарг и Д. Хуанг. Мы благодарим также г-жу Сюзен Мерел, г-жу Дэнис Сидди, г-жу Мэри Берден, г-жу Фрэнси Бурдэ и г-жу Мэри Энн Прудер за печатание многочисленных вариантов рукописей. И наконец, мы выражаем нашу признательность Национальному фонду, министерству военно-воздушных сил, министерству военно-морского

флота, министерству вооруженных сил, фирмам «Вестингхаус», «Мартин Мариэтта Аэроспейс», «Мартин Мариэтта Энеджи Системз», «Юнион Карбайд», «Локхид Миссайлз энд Спэйс Компани», Ок-Риджской национальной лаборатории и Университету центра по управлению и измерениям в Теннесси за финансирование наших исследований в области робототехники, искусственного зрения, искусственного интеллекта и смежных областях.

*К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли*

Профессор Кинсан Фу скончался 29 апреля 1985 г. в Вашингтоне (округ Колумбия) от сердечного приступа вскоре после завершения работы над этой книгой. Это большая потеря для всех, кому посчастливилось знать этого человека и работать с ним на протяжении его продуктивной и выдающейся творческой деятельности.

*Р. Гонсалес  
К. Ли*

## ОБ АВТОРАХ

Кинсан Фу был профессором Университета Пэрдью. Он получил ученые степени бакалавра, магистра и доктора наук соответственно в Национальном университете Тайваня, университетах Торонто и Иллинойса, был всемирно известным специалистом в области распознавания образов, обработки изображений и искусственного интеллекта, внес существенный вклад как в фундаментальные, так и прикладные исследования. Написал четыре книги и более 400 статей по автоматическому распознаванию образов. Подготовил 75 докторов наук. Был избран членом Национальной инженерной академии в 1976 г., удостоен медалей Американского общества технического образования в 1981 г. и Международного общества по электронике и электротехнике в 1982 г. Был членом Международного общества по электронике и электротехнике, с 1971 г. — членом общества Гугенхейма, а также почетным членом обществ Сигма Кси, Эта Каппа Нью и Тау Бета Пи. Основал и был первым президентом Международной ассоциации по распознаванию образов, был главным редактором журнала по распознаванию образов и машинному интеллекту. Профессор Фу умер от сердечного приступа 29 апреля 1985 г. в Вашингтоне.

Рафаэль Гонсалес является профессором по вычислительной технике Университета Теннесси в Кноксвилле, а также основателем и президентом фирмы Персептикс Корпорейшн, которая специализируется в области обработки изображений, распознавания образов, технического зрения и машинного интеллекта. Степень бакалавра он получил в Университете Майами, а ученые степени магистра и доктора — в Университете Флорида в Гейнесвилле. Всемирно известен в своей области, им или с его участием написано более 100 статей и 4 книги в области обработки изображений, распознавания образов и машинного зрения. Является консультантом многих промышленных фирм и правительственных учреждений. Состоит во многих научных

обществах, в том числе в обществах Тау Бета Пи, Фи Каппа Фи, Эта Каппа Ну, Сигма Кси, а также в международном обществе по электронике и электротехнике.

К. Ли является профессором Университета Пэрдью. Ученые степени бакалавра и магистра он получил в Вашингтонском государственном университете, а степень доктора наук в Университетах Пэрдью и Мичигана. Автор более 40 научных статей, докладов по робототехнике на многих конференциях. В настоящее время специализируется в области робототехники, автоматизации и интегрированных производственных систем. Ведет интенсивную консультационную работу в области робототехники для автомобильных и аэрокосмических фирм. Рецензент-консультант с 1983 г. научных программ в области применения вычислительной техники Международного общества по электронике и электротехнике, технический издатель журнала по робототехнике и автоматизации, член технических комитетов различных конференций по робототехнике. Состоит в научных обществах Сигма Кси, Тау Бета Пи, Международном обществе по электронике и электротехнике, в Американской ассоциации по промышленным роботам.

## Глава 1. ВВЕДЕНИЕ

Одна машина может выполнять работу сотни обыкновенных людей, но никакая машина не заменит одного выдающегося человека.

Элберт Хаббард

### 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Растущие потребности производства в выпуске качественной продукции обуславливают все более широкое применение в промышленности средств автоматизации, в основе которых лежит вычислительная техника. В настоящее время большинство автоматизированных работ на производстве осуществляется машинами, специально сконструированными для выполнения определенных функций в производственном процессе. Такие машины, как правило, дороги и не обладают гибкостью, т. е. они могут быть использованы только для конкретных, заранее определенных работ. В связи с этим все больший интерес проявляется к использованию роботов, способных выполнять различные производственные функции в обстановке гибкого производственного процесса при более низких материальных затратах.

Слово *робот* происходит от чешского слова *robota*, означающего работу. В словаре Вебстера робот определяется как автоматическое устройство, которое выполняет функции, обычно приписываемые человеку. В соответствии с этим определением моечные машины являются роботами. В Американском робототехническом институте применяют более точное определение промышленных роботов: *перепрограммируемый многофункциональный манипулятор*, предназначенный для осуществления различных заранее заданных перемещений материалов, деталей, инструментов или специальных приспособлений с целью выполнения различных работ. Итак, робот представляет собой перепрограммируемый универсальный манипулятор, снабженный внешними датчиками и способный выполнять различные сборочные работы. Это определение предполагает наличие у робота *интеллекта*, обусловленного заложенными в компьютер алгоритмами систем управления и очувствления.

Промышленный робот представляет собой универсальный, оснащенный компьютером манипулятор, состоящий из нескольких твердых звеньев, последовательно соединенных вращательными или поступательными сочленениями. Эта цепь одним

концом соединена с основанием манипулятора, другой ее конец свободен и снабжен инструментом, позволяющим воздействовать на объекты манипулирования или выполнять сборочные

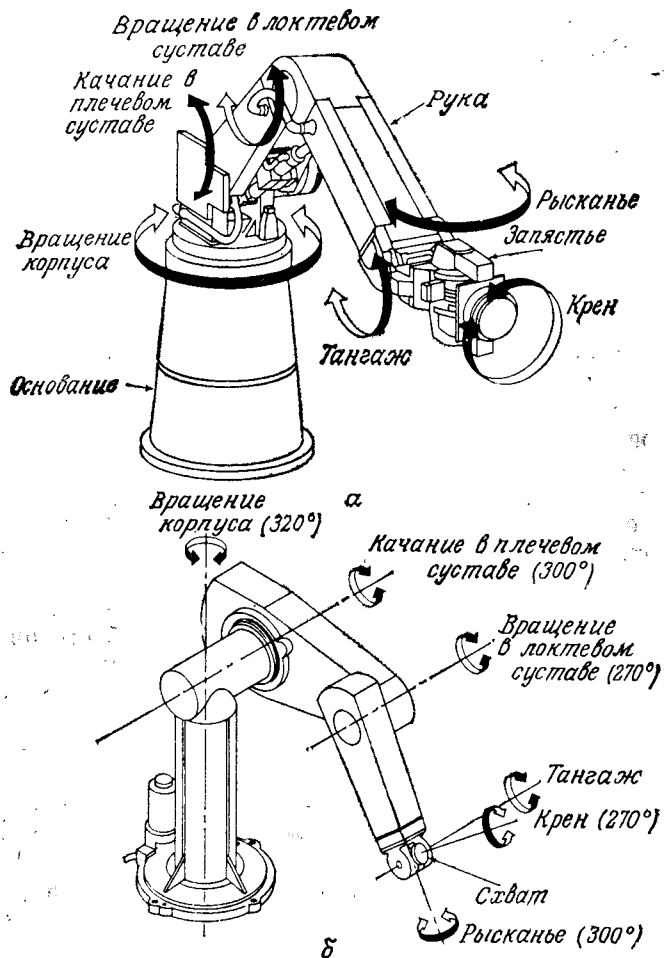


Рис. 1.1. Манипулятор Т<sup>3</sup> фирмы «Цинциннати Милакрон» (а) в манипулятор Пума-560 (б).

работы. Движение в сочленениях манипулятора вызывает относительное перемещение его звеньев. С точки зрения механики робот состоит из руки (несущей конструкции) и узла запястья, оснащенного инструментом. Он может воздействовать на объекты, расположенные внутри его рабочего объема. Под рабочим объемом робота подразумевается область пространства, в каждую точку которой рука робота может доставить блок за-

пястья. Обычно рука робота обладает тремя степенями свободы. Комбинацией перемещений по этим степеням свободы обеспечивается перенос узла запястья в заданную точку рабочего объема. Узел запястья обычно обладает тремя вращательными степенями свободы. Комбинацией вращений в узле запястья обеспечивается необходимая для работы с объектом манипулирования ориентация инструмента. Три угловых движения, реализуемые узлом запястья, часто называют танга-

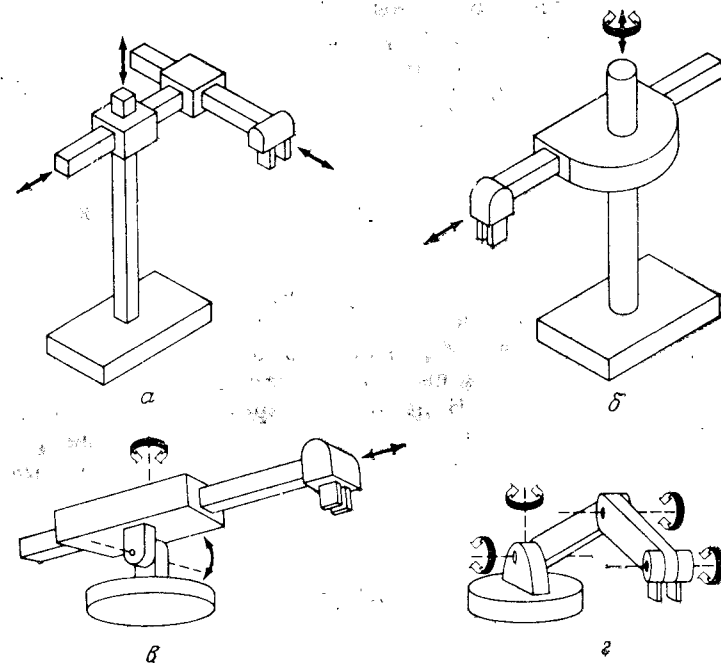


Рис. 1.2. Различные категории манипуляторов.

жем, рысканьем и креном. Таким образом, рука шестизвенного робота обеспечивает нужное положение инструмента, а узел запястья — его правильную ориентацию. Все сказанное иллюстрирует рис. 1.1, на котором изображены манипуляторы Т<sup>3</sup> фирмы «Цинциннати Милакрон» и Пума фирмы «Юнимейшн».

Промышленные роботы широко используются для выполнения таких функций в производственном процессе, как сборочно-монтажные, сварочные, покрасочные, погрузочно-разгрузочные работы. Их используют для проведения космических и подводных исследований, для работы с вредными веществами и радиоактивными материалами. Все эти роботы относятся к одной из четырех основных категорий, различающихся по способу осуществления пространственных перемещений (рис. 1.2):

● Роботы с декартовой системой координат, имеющие три поступательных сочленения (например, робот RS-1 фирмы ИБМ и робот Sigma фирмы «Оливетти») (а).

● Роботы с цилиндрической системой координат, имеющие два поступательных и одно вращательное сочленение (например, робот Versatrap 600 фирмы «Прэб») (б).

● Роботы со сферической системой координат, имеющие одно поступательное и два вращательных сочленения (например, робот Unimate-200В фирмы «Юнимейшн») (в).

● Роботы с вращательной, или шарнирной, системой координат, имеющие три вращательных сочленения (например, робот T<sup>3</sup> фирмы «Цинциннати Милакрон» и робот Пума фирмы «Юнимейшн») (г).

Большинство современных промышленных роботов, несмотря на то что управление ими осуществляется с помощью микро- и мини-ЭВМ, представляют собой по сути простые позиционные механизмы. Их функционирование сводится к воспроизведению заранее запрограммированной последовательности движений. Кроме того, эти роботы не оборудованы или оборудованы в недостаточной степени внешними датчиками, поставляющими информацию о рабочей обстановке. В результате роботы применяются в основном для выполнения простых, многократно повторяющихся операций. В настоящее время усилия исследователей направлены на дальнейшее совершенствование робототехнических систем. Одним из путей такого совершенствования является изучение ряда важных вопросов робототехники, изложенных в этой книге.

## 1.2. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ РОБОТОВ

Слово *робот* в английском языке впервые появилось в 1921 г. после выхода в свет сатирической пьесы Карела Чапека «РУР». В этой пьесе роботы — человекоподобные машины, обладающие способностью работать без усталости. Они были созданы для того, чтобы работать вместо людей. Однако в конце пьесы роботы восстают против своих создателей и уничтожают все человечество. В большой мере именно пьеса Чапека породила бытующее и по сей день представление о роботах, как о человекоподобных машинах, обладающих интеллектом и индивидуальностью. Этот образ был подкреплен фильмом «Метрополис», созданным в 1926 г. в Германии. Робот Электро и его собака Спарко успешно демонстрировались в 1939 г. на Всемирной ярмарке в Нью-Йорке. Робот СЗРО из более позднего, созданного в 1977 г. фильма «Звездные войны» также способствовал этому представлению. Современные промышленные роботы несомненно покажутся примитивными в сравнении с обра-

зом, созданным средствами массовой информации за последние шесть десятилетий.

Первые роботы, с которых началась современная робототехника, появились сразу после второй мировой войны. В конце 40-х годов в Окриджской и Аргоннской национальных лабораториях были начаты исследовательские программы по созданию дистанционно управляемых механических манипуляторов для работы с радиоактивными материалами. Разрабатывались манипуляторы копирующего типа, предназначенные для точного воспроизведения движений руки и кисти человека-оператора. В систему входили задающий и копирующий манипуляторы. Задающий манипулятор приводился в движение человеком-оператором, при этом копирующий манипулятор воспроизводил с максимальной точностью все движения задающего. Позднее путем установления механических связей между задающим и копирующим манипуляторами была введена обратная связь, позволяющая оператору ощущать силы взаимодействия между копирующим манипулятором и его рабочей средой. В середине 50-х годов механические способы введения обратной связи были заменены электрическими и гидравлическими, как, например, в манипуляторе Handyman фирмы «Дженерал Электрик» и манипуляторе Minotaur-I фирмы «Дженерал Милз».

Вскоре вслед за манипуляторами копирующего типа были разработаны более сложные системы, способные выполнять многократно повторяющиеся операции в автономном режиме. В середине 50-х годов Джордж С. Девол сконструировал устройство, названное им «программируемое шарнирное устройство для переноски» — манипулятор, функционирование которого задавалось программой (следовательно, могло изменяться) в виде последовательности элементарных движений, определенных командами этой программы. Дальнейшее совершенствование Деволом совместно с Джозефом Ф. Энгельбергером этого замысла привело к созданию первого промышленного робота, выпущенного в 1959 г. фирмой «Юнимейшн». Основная идея при создании этого устройства заключалась в совмещении манипулятора с компьютером, что позволило получить машину, которую можно было «обучать» автоматическому выполнению разнообразных работ. От специализированных автоматических машин эти роботы отличались возможностью смены выполняемых операций при изменении условий производственного процесса. Изменение выполняемых роботом операций осуществлялось путем относительно недорогого перепрограммирования и переоснащения.

В 60-х годах стало очевидно, что гибкость программируемых роботов — этого нового мощного промышленного инструмента — может быть существенно повышена за счет использования средств осязания. В начале 60-х годов Эрнст [72]



разработал управляемую с помощью компьютера механическую руку с тактильными датчиками. Это устройство, названное МН-1, могло «осязать» блоки, с которыми оно работало, и использовало поступающую с датчиков информацию для управления захватным устройством, что позволяло укладывать блоки без помощи оператора. Эта разработка является одним из первых примеров робота, способного адаптироваться к неполностью определенной внешней обстановке. Система состояла из манипулятора ANL Model-8 с шестью степенями свободы, управляемого с помощью устройства обмена компьютером TX-0. Позднее эта исследовательская разработка стала частью проекта MAC, по которому в состав системы вводилась еще и телевизионная камера. В тот же период Томович и Бони [287] разработали опытный образец схвата с датчиками, измеряющими давление при соприкосновении с объектом, по которому формировался сигнал обратной связи на мотор силового привода. Как только схват входил в контакт с объектом, с датчиков давления в компьютер поступала информация о размерах и весе объекта манипулирования. В 1963 г. фирма «Американ Мэшин энд Фаундри Компани» (AMF) начала выпуск промышленного робота VERSATRAN. В этом же году был начат ряд разработок промышленных роботов, таких, как эдинбургский и роэмптонский манипуляторы.

В конце 60-х годов Маккарти [194] со своими коллегами из Лаборатории искусственного интеллекта в Станфорде сообщили о создании компьютера, имеющего руки, глаза и уши (т. е. оснащенного манипуляторами, телевизионными камерами и микрофонами). Ими была продемонстрирована система, которая воспринимала устные команды, «видела» разбросанные на столе блоки и манипулировала этими блоками в соответствии с полученными инструкциями. В этот же период Пайпер [235] провел исследования, касающиеся кинематики управляемого компьютером манипулятора, а Кан и Рот [140] исследовали вопросы динамики и управления манипулятором с ограничениями. Последние применили релейное управление, обеспечивающее максимальное быстродействие.

Одновременно промышленные роботы начали развиваться и в других странах, особенно в Японии. Уже в 1968 г. японская фирма «Кавасаки Хэви Индастриз» покупает у фирмы «Юнимейшн» лицензию на выпуск промышленных роботов. В 1969 г. фирма «Дженерал Электрик» закончила разработку экспериментальной шагающей платформы для вооруженных сил США — одну из наиболее необычных разработок в области робототехники. В этом же году был создан бостонский манипулятор, а в следующем — станфордский манипулятор, оснащенный телевизионной камерой и управляющим компьютером. Создание этих манипуляторов положило начало ряду наиболее

серьезных исследований в области робототехники. Один из экспериментов со станфордским манипулятором состоял в автоматической укладке блоков по различным заданным правилам. Это была очень сложная задача для роботов того времени. В 1974 г. фирма «Цинциннати Милакрон» представила первого управляемого компьютером промышленного робота, названного T<sup>3</sup> (The Tomogrow Tool — инструмент будущего). Этот робот мог поднимать грузы весом более 40 кг и работать с движущимися объектами на сборочном конвейере.

В течение 70-х годов большое внимание в исследованиях уделялось использованию датчиков внешней обстановки для повышения качества функционирования манипуляторов. В Станфорде Боллес и Пол [26] создали станфордский манипулятор, предназначенный для сборки автоматических водяных насосов. Управление этим манипулятором осуществлялось с помощью компьютера PDP-10 на основе информации от зрительных и силовых датчиков. Приблизительно в это же время Вилл и Гроссман [311] из фирмы ИБМ разработали управляемый компьютером манипулятор с тактильными и силовыми датчиками, предназначенный для сборки пирующей машинки, состоящей из двадцати деталей. В Лаборатории искусственного интеллекта Массачусетского технологического института проводились работы [132], связанные с использованием сигналов обратной связи от силовых датчиков. Для обеспечения правильного начального положения схвата при проведении высокоточных сборочных работ использовался метод поисковой навигации в ближней зоне. В Лаборатории Дрейпера Невинс и др. [211] проводили исследования по методам очувствления, базирующимся на свойствах упругих деформаций. В результате этих работ был создан прибор, названный «удаленный центр упругой податливости» (remote center compliance). Этот прибор монтировался на упорной пластине последнего звена манипулятора при выполнении высокоточных сборочных работ. Бьещи [16] из Лаборатории реактивного движения для управления удлинненным станфордским манипулятором, предназначенным для космических исследований, применил методку измерения моментов. После этого был предложен еще ряд различных способов управления механическими манипуляторами.

В настоящее время робототехника представляет собой значительно более обширную область науки, чем можно было себе представить всего несколько лет назад. Она включает вопросы кинематики, динамики, планирования стратегий, языков программирования и искусственного интеллекта. Все эти вопросы освещены в следующих разделах и составляют содержание данной книги.

### 1.3. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА МАНИПУЛЯТОРА

Предметом кинематики манипулятора является аналитическое описание геометрии движения манипулятора относительно некоторой заданной абсолютной системы координат без учета сил и моментов, порождающих это движение. Таким образом, задачей кинематики является аналитическое описание пространственного расположения манипулятора в зависимости от времени, и, в частности, установление связи между значениями присоединенных координат манипулятора и положением и ориентацией его схвата в декартовом пространстве.

В кинематике манипулятора выделяются две основные задачи. Первая из них обычно называется *прямой*, а вторая — *обратной задачей кинематики манипулятора*. Поскольку присоединенные переменные составляют систему независимых координат манипулятора, а задача обычно формулируется в абсолютной декартовой системе координат, обратная задача кинематики возникает более часто. Денавит и Хартенберг [57] разработали единый общий подход к описанию пространственной геометрии манипулятора относительно заданной абсолютной системы координат, основанный на применении матричной алгебры. Они предложили использовать для описания взаимного пространственного расположения звеньев матрицы однородных преобразований, имеющие размерность  $4 \times 4$ . Тем самым прямая задача кинематики свелась к определению матрицы однородного преобразования, задающей связь между системой координат схвата и абсолютной системой координат. Матрицами однородных преобразований удобно пользоваться и при выводе уравнений динамики движения манипулятора. Обратная задача кинематики может быть решена различными методами. К числу наиболее часто используемых относятся методы матричной алгебры, метод итераций и геометрический подход. Подробно прямая и обратная задачи кинематики рассмотрены в гл. 2.

Предметом динамики манипулятора является математическое описание действующих на манипулятор сил и моментов в виде уравнений динамики движения. Такие уравнения необходимы для моделирования движения манипулятора с помощью ЭВМ, при выборе законов управления и оценке качества кинематической схемы и конструкции манипулятора. Динамическая модель манипулятора может быть построена на основе использования известных законов ньютоновской или лагранжевой механики. Результатом применения этих законов являются уравнения, связывающие действующие в сочленениях силы и моменты с кинематическими характеристиками и параметрами движения звеньев. Полное описание динамики движения мани-

пулятора можно получить, применяя традиционные методы Лагранжа—Эйлера или Ньютона—Эйлера. Подробному изложению вопросов динамики манипулятора посвящена гл. 3.

### 1.4. ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА

Опираясь на законы кинематики и динамики манипулятора, можно так управлять силовыми приводами сочленений, чтобы манипулятор двигался вдоль некоторой заданной траектории, обеспечивающей выполнение поставленной задачи. Перед началом движения манипулятора важно знать, во-первых, существуют ли на его пути какие-либо препятствия и, во-вторых, накладываются ли какие-либо ограничения на характер его траектории. Задачу управления манипулятором удобно разбить на две последовательные подзадачи: задачу выбора (планирования) траектории и задачу управления движением вдоль выбранной траектории.

Пространственную кривую, вдоль которой движется схват манипулятора из начального положения в конечное, обычно называют *траекторией схвата*. Планирование траектории состоит в интерполяции и/или аппроксимации выбранной траектории полиномами некоторого класса и построении последовательности опорных точек для управления манипулятором при его движении из начального положения в конечное. В гл. 4 рассматриваются различные схемы планирования траекторий при отсутствии препятствий на пути манипулятора. Излагается формализм описания заданного движения манипулятора в виде последовательности точек пространства, через которые должен пройти манипулятор, и пространственной кривой, соединяющей эти точки.

В задачу регулирования движения манипулятора вдоль выбранной траектории входят построение динамической модели манипулятора (первая часть) и выбор на основе этой модели законов управления, обеспечивающих заданное поведение системы (вторая часть). Поскольку первая часть задачи регулирования движением подробно изучена в гл. 3, гл. 5 посвящена второй части задачи. Обычно движение манипулятора осуществляется в два этапа, отличающихся с точки зрения реализуемого управления. Первый этап — этап грубого управления — обеспечивает перемещение манипулятора из начальной точки вдоль заданной траектории в окрестность точки, соответствующей конечным заданным положению и ориентации схвата. В течение второго этапа — этапа точного управления — осуществляется динамическое взаимодействие рабочего узла манипулятора с объектом манипулирования, обеспечивающее выполне-

ние поставленной задачи. На втором этапе используется информация, поступающая от датчиков обратной связи.

При синтезе систем управления современных промышленных роботов принято рассматривать приводы сочленений манипулятора как простые сервомеханизмы. Такой подход неадекватно отражает переменные динамические характеристики манипулятора, поскольку не учитывает движения и конфигурации манипулятора в целом. В ряде случаев нестабильность параметров управляемой системы делает традиционные методы управления с обратной связью практически неэффективными. При этом возрастает инерционность и колебательность процессов обработки заданных команд, что приводит к снижению точности и скорости движения рабочего органа и ограничивает область применения манипулятора работами, не требующими высокой точности. Движение манипуляторов, управляемых указанным образом, характеризуется низкой скоростью и вредными вибрациями. Сколько-нибудь значительное улучшение качества функционирования манипулятора может быть достигнуто лишь на основе использования более точных динамических моделей, синтеза достаточно сложных законов управления и применения специализированных компьютеров с параллельной обработкой данных. В гл. 5 рассматриваются вопросы синтеза законов грубого управления, позволяющих на базе построенных в гл. 3 динамических моделей осуществлять эффективное управление манипулятором.

## 1.5. СИСТЕМЫ ОЧУВСТВЛЕНИЯ РОБОТОВ

Применение датчиков внешней обстановки позволяет осуществлять гибкое взаимодействие робота с внешней средой. Такой способ функционирования существенно отличается от программного, при котором робот выполняет последовательность повторяющихся заранее заданных операций. Хотя до сих пор именно программный способ функционирования является основным для промышленных роботов, развитие технологии очувствления, позволяющей наделить машину элементами интеллекта, является важным направлением в области робототехники.

Датчики (сенсорные устройства) робота можно разделить на две основные категории: датчики внешней обстановки и датчики внутреннего состояния. Датчики внутреннего состояния поставляют информацию о переменных состоянии манипулятора, например о значениях присоединенных координат, используемую при формировании команд управления. Датчики внешней обстановки измеряют дальность до объекта, скорость сближения, регистрируют непосредственный контакт с объектом (тактильные датчики). Система внешнего очувствления, являющаяся предметом обсуждения в гл. 6—8, используется при наведении

манипулятора на объект, при идентификации объекта и манипулировании с ним. В гл. 6 рассматриваются подсистемы, формирующие информацию о дальности, скорости сближения, реализуемых силах и моментах, а также подсистема тактильного очувствления. Подсистема зрительного очувствления подробно рассматривается в гл. 7 и 8. Искусственному зрению отводится среди других подсистем очувствления основная роль в дальнейшем совершенствовании робототехнических систем. Искусственное зрение можно рассматривать как процесс выделения, спецификации и интерпретации информации, содержащейся в изображениях трехмерного пространства. Этот процесс, называемый также машинным зрением, подразделяется на шесть стадий: 1) восприятие; 2) первичная обработка, или предобработка; 3) сегментация; 4) описание; 5) распознавание; 6) интерпретация.

Перечисленные выше стадии удобно сгруппировать по уровню сложности их реализации. Мы будем рассматривать три уровня обработки: низкий, средний и высокий. Хотя между ними отсутствуют четкие границы, они дают удобную классификацию процессов, составляющих машинное зрение. Зрительными функциями низкого уровня мы будем считать восприятие и предобработку. На этом уровне производятся формирование изображения, фильтрация шумов и выделение элементарных особенностей, таких, как скачкообразные изменения плотности изображения. К зрительным функциям среднего уровня мы будем относить процессы выделения компонент изображений, полученных в результате зрительной обработки низкого уровня, формального описания особенностей этих компонент и их классификации. В терминах приведенного выше разбиения это будут сегментация, описание и распознавание. Зрительные функции высокого уровня представляют собой попытку воспроизведения процесса познания. В гл. 7 рассмотрены вопросы восприятия и предобработки и методы реализации зрительных функций низкого уровня. Зрительные функции среднего и высокого уровней обсуждаются в гл. 8.

## 1.6. ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Существенным препятствием на пути применения манипуляторов в качестве универсальных сборочных или других технологических машин является недостаток средств общения между пользователем и робототехнической системой, с помощью которых пользователь мог бы формулировать подлежащую выполнению задачу. Существует несколько способов общения с роботом, базирующихся на трех основных подходах:

распознавании слов, обучении и воспроизведении, применении языков программирования высокого уровня.

Современный уровень возможностей в распознавании слов весьма примитивен. Он допускает восприятие ограниченного набора слов, и, как правило, говорящий должен делать между словами паузы. Хотя благодаря росту быстродействия компьютеров и использованию эффективных алгоритмов обработки в настоящее время стало возможным восприятие слов в реальном темпе, применимость этого подхода для постановки задачи перед роботом весьма ограничена. Кроме того, хранение речевой информации требует большого объема машинной памяти, и обычно требуется определенный период обучения, в течение которого формируются речевые эталоны, используемые при распознавании слов.

Метод обучения и воспроизведения состоит в обучении робота движениям, которые он должен выполнять, путем проведения манипулятора через всю последовательность заданных движений. Обучение состоит из следующих этапов: 1) с помощью ручного управления в медленном темпе осуществляется выполнение всех операций, которые манипулятор должен проделать во время решения задачи. При этом в определенных положениях производится запись значений присоединенных координат манипулятора, чтобы выполняемое движение могло быть впоследствии воспроизведено; 2) движения, которым робот был обучен на первом этапе, воспроизводятся и корректируются; 3) если робот правильно воспроизводит заданные движения, начинается его функционирование, состоящее в периодическом повторении этих движений в соответствующем темпе. Данный метод, называемый также методом обучения в ручном режиме, наиболее часто используется в современных промышленных роботах.

Более общим подходом к решению задачи человеко-машинного общения является использование языков программирования высокого уровня. Роботы часто используются для проведения сварочных и покрасочных работ. Такие роботы не требуют непосредственного взаимодействия робота с внешней средой, и необходимое поведение робота легко задается методом обучения и воспроизведения. Однако использование роботов для выполнения сборочных работ требует применения методов программирования на языках высокого уровня. Этот подход оправдывается также и тем, что управление манипулятором обычно осуществляется с помощью компьютера, а наиболее эффективным средством общения человека с компьютером являются именно языки программирования высокого уровня. Более того, описание сборочных работ в виде программ позволяет использовать робот для выполнения различных заданий, что осуществляется путем простой смены исполняемой программы.

Это расширяет возможности адаптации роботов к условиям изменяющегося производственного процесса и повышает их универсальность. Применение языков программирования высокого уровня для обеспечения эффективного общения с роботом обсуждается в гл. 9.

## 1.7. МАШИННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

Основной проблемой робототехники является проблема планирования движений, обеспечивающих выполнение поставленной задачи, и последующего управления манипулятором с целью реализации запланированных движений. Под планированием мы подразумеваем выбор стратегии поведения, осуществляемый до начала выполнения задачи. Выбор стратегии поведения осуществляется системой выбора стратегий исходя из поставленной цели и с учетом заданной начальной ситуации. Таким образом, план представляет собой описание стратегии поведения, выбранной для достижения поставленной цели.

В результате исследований в области выбора стратегий поведения роботов был создан ряд подходов к построению систем выбора стратегий, принадлежащих к разряду систем искусственного интеллекта. Типичная для робототехники формулировка задачи состоит в следующем. Имеется робот, снабженный сенсорными устройствами, и задан набор элементарных операций, которые этот робот может выполнять в некоторой достаточно простой обстановке. Своими действиями робот изменяет окружающую обстановку. Например, внешняя обстановка может представлять собой набор помеченных блоков, лежащих на столе или друг на друге, а робот, состоящий из телевизионной камеры, подвижной руки и схвата, может поднимать и передвигать эти блоки. В других ситуациях робот представляет собой подвижную тележку с телевизионной камерой, которая толкает объекты с одного места на другое по плоскости, на которой находятся другие объекты.

В гл. 10 изложен ряд основных методов выбора стратегий и рассмотрены возможности их применения для планирования траекторий манипуляторов. Планировщик, входящий в состав робота, осуществляет поиск пути из начального состояния окружающей робота обстановки к конечному. Путь состоит из последовательности операций, считающихся для данной системы элементарными. Выбранная стратегия может служить основой для выполнения реальных действий в реальной окружающей обстановке. Системы планирования поведения роботов, вносящие в робототехническую систему элементы интеллекта и позволяющие осуществлять выбор стратегий поведения, являются в настоящее время предметом интенсивных исследований. Для обеспечения функционирования робота в реальном темпе необ-

ходимы мощные и эффективные алгоритмы планирования, а также быстродействующие специализированные компьютеры, позволяющие эти алгоритмы реализовать.

## 1.8. ЛИТЕРАТУРА

Ниже приводится список изданий, содержащих публикации по робототехнике и смежным вопросам. Литература по конкретным темам представлена в конце каждой главы. Библиография в конце книги содержит полную информацию о всех источниках, упомянутых в тексте. Список источников составлен в алфавитном порядке фамилий авторов.

Традиционно вопросы робототехники освещаются в следующих журналах: IEEE Journal of Robotics and Automation; International Journal of Robotics Research; Journal of Robotic Systems; Robotica; IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics; Artificial Intelligence; IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence; Computer Graphics, Vision, and Image Processing; IEEE Transactions on Automatic Control; Mechanism and Machine Theory; ASME Journal of Mechanical Design; ASME Journal of Applied Mechanics, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control; ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, а также в материалах Международного симпозиума по промышленным роботам, Международной объединенной конференции по вопросам искусственного интеллекта, Международной конференции по автоматике и робототехнике и в трудах общества инженеров фотооптической аппаратуры<sup>1)</sup>.

Материал по всем затронутым в этой книге вопросам в достаточном объеме содержится в работах [49, 60, 62, 71, 163, 229, 270, 289].

<sup>1)</sup> Из отечественных можно назвать следующие журналы: «Техническая кибернетика», Изв. АН СССР; «Механика твердого тела»; «Машиноведение»; «Проблемы машиностроения»; «Приборы и системы управления»; «Вестник машиностроения», а также тематические сборники, труды конференций. — Прим. ред.

Смотри! Она зашевелилась, она начинает двигаться, кажется, она чувствует движение жизни.

Х. В. Лангфелло

## 2.1. ВВЕДЕНИЕ

Механический манипулятор можно рассматривать как разомкнутую цепь, которая состоит из нескольких твердых тел (звеньев), последовательно соединенных вращательными или поступательными сочленениями, приводимыми в движение силовыми приводами. Один конец этой цепи соединен с основанием, а другой конец свободен и снабжен рабочим инструментом, позволяющим воздействовать на объекты манипулирования или выполнять различные технологические, например сборочные, операции. Относительное движение сочленений передается звеньям, в результате чего схват манипулятора занимает в пространстве заданное положение. В большинстве приложений робототехники требуется описать пространственное положение схвата по отношению к заданной абсолютной системе координат.

Кинематика манипулятора изучает геометрию движения манипулятора относительно заданной абсолютной системы координат, не рассматривая силы и моменты, порождающие это движение. Таким образом, ее предметом является описание пространственного положения манипулятора как функции времени, и, в частности, соотношения между пространством присоединенных переменных манипулятора — обобщенными координатами, положением и ориентацией схвата. В этой главе рассмотрены две основные задачи кинематики манипулятора (важные как в теоретическом, так и в прикладном плане).

1. Для конкретного манипулятора по известному вектору присоединенных углов — обобщенных координат  $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T$  и заданным геометрическим параметрам звеньев ( $n$  — число степеней свободы) определить положение и ориентацию схвата манипулятора относительно абсолютной системы координат.

2. При известных геометрических параметрах звеньев найти все возможные векторы присоединенных переменных манипулятора, обеспечивающие заданное положение и ориентацию схвата относительно абсолютной системы координат.

Первую из этих задач принято называть *прямой*, а вторую — *обратной задачей кинематики манипулятора*. Поскольку собственными независимыми переменными манипулятора являются присоединенные переменные, а задача, как правило, формулируется в координатах абсолютной системы отсчета, обратная задача кинематики возникает более часто, чем прямая. На рис. 2.1 приведена блок-схема, иллюстрирующая взаимосвязь этих задач.

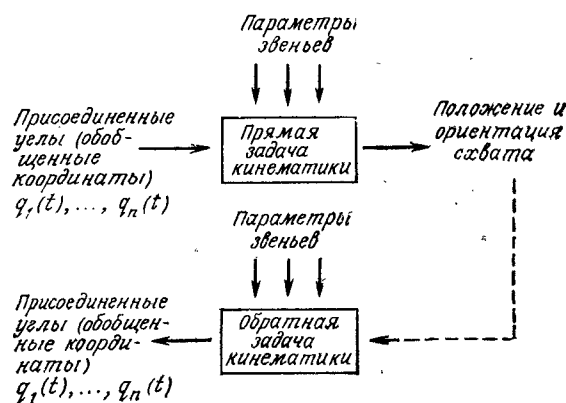


Рис. 2.1. Прямая и обратная задачи кинематики.

Так как звенья манипулятора совершают вращательное и/или поступательное движение относительно абсолютной системы координат, результирующее пространственное положение схвата определяется угловым и поступательным движениями звеньев. В работе [57] изложен общий систематический подход к описанию пространственного расположения звеньев манипулятора в абсолютной системе отсчета, основанный на применении матричной алгебры. Для описания взаимного пространственного положения двух смежных звеньев этот подход использует однородную матрицу преобразования размерностью  $4 \times 4$ . Прямая задача кинематики сводится тем самым к определению однородной матрицы преобразования, характеризующей пространственное положение системы координат схвата манипулятора в абсолютной системе отсчета. Однородные матрицы преобразования используются также при выводе уравнений динамики движения манипулятора.

К решению обратной задачи кинематики существует, вообще говоря, несколько подходов. Наиболее часто используются методы матричной алгебры, метод итераций и геометрический подход. На примере решения обратной задачи кинематики простого манипулятора с вращательными сочленениями мы рассмотрим геометрический подход, основой для которого служат понятия

систем координат звеньев и конфигураций манипулятора. Кроме того, будет предложен более общий подход с использованием однородных матриц размерностью  $4 \times 4$ , который проиллюстрирован на примере решения обратной задачи кинематики простых манипуляторов.

## 2.2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

Ниже матричная и векторная алгебра<sup>1)</sup> применяются для систематического и обобщенного подхода к описанию и представлению расположения звеньев манипулятора (исполнительных механизмов робота) относительно заданной абсолютной системы координат. Так как звенья манипулятора могут совершать вращательное и/или поступательное движение относительно абсолютной системы отсчета, для каждого звена определяется связанная система координат, оси которой параллельны осям сочленений звеньев. Прямая задача кинематики сводится к определению матрицы преобразования, устанавливающей связь между абсолютной и связанной системами координат. Для описания вращательного движения связанной системы отсчета относительно абсолютной используется матрица поворота<sup>2)</sup> размерностью  $3 \times 3$ , для представления векторов положения в трехмерном пространстве применяются однородные координаты, а для учета поступательного движения связанной системы координат вместо матрицы поворота используется матрица однородного преобразования размерностью  $4 \times 4$ . Таким матричным представлением для описания пространственной геометрии манипулятора впервые воспользовались Денавит и Хартенберг [57]. Их представление дает универсальный алгоритм для вывода уравнений кинематики манипулятора.

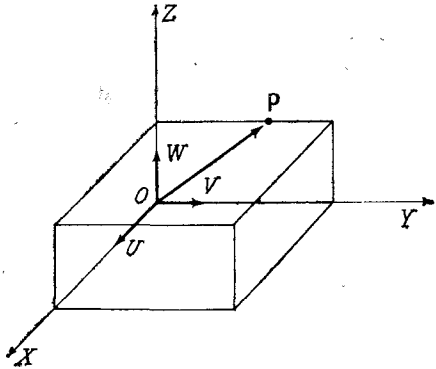
### 2.2.1. Матрицы поворота

Матрицу поворота размерностью  $3 \times 3$  можно определить как матрицу преобразования трехмерного вектора положения в евклидовом пространстве, переводящую его координаты из повернутой (связанной) системы отсчета  $OUVW$  в абсолютную систему координат  $OXYZ$ . На рис. 2.2 показаны две правые прямоугольные системы координат: системы координат  $OXYZ$  с осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  и система  $OUVW$  с осями  $OU$ ,  $OV$ ,  $OW$ . Начала этих систем совпадают и расположены в точке  $O$ . Система  $OXYZ$  фиксирована в трехмерном пространстве и принята за абсолютную,

<sup>1)</sup> Для обозначения векторов и матриц используются соответственно полужирные строчные и прописные буквы.

<sup>2)</sup> В ряде работ эту матрицу называют матрицей вращения. Оба понятия идентичны. — Прим. ред.

а система координат  $OUVW$  вращается относительно абсолютной системы  $OXYZ$ . Физически система  $OUVW$  может рассматриваться как связанная система координат. Это означает, что она соответствующим образом жестко связана с твердым телом (например, с летательным аппаратом или звеном манипулятора) и движется вместе с ним. Пусть  $(i_x, j_y, k_z)$  и  $(i_u, j_v, k_w)$  — единичные векторы, направленные вдоль осей систем  $OXYZ$  и  $OUVW$  соответственно. Некоторую точку  $p$  в пространстве



можно охарактеризовать координатами относительно любой из указанных систем. Для простоты рассуждений предположим, что точка  $p$  фиксирована и неподвижна в системе отсчета  $OUVW$ . Тогда в системах координат  $OUVW$  и  $OXYZ$  точка  $p$  будет иметь соответственно координаты

$$p_{uvw} = (p_u, p_v, p_w)^T \quad \text{и} \quad p_{xyz} = (p_x, p_y, p_z)^T, \quad (2.2-1)$$

Рис. 2.2. Абсолютная и связанная системы координат.

где  $p_{xyz}$  и  $p_{uvw}$  характеризуют положение одной и той же точки  $p$  относительно различных систем отсчета. Верхний индекс  $T$ , добавляемый к обозначению вектора или матрицы, обозначает операцию транспонирования.

Наша задача состоит в том, чтобы определить матрицу  $R$  размерностью  $3 \times 3$ , которая преобразует координаты  $p_{uvw}$  в координаты вектора  $p$  в системе  $OXYZ$  после того, как система  $OUVW$  будет повернута, т. е.

$$p_{xyz} = R p_{uvw}. \quad (2.2-2)$$

Заметим, что физически точка  $p$  вращается вместе с системой координат  $OUVW$ .

Из определения компонент вектора имеем

$$p_{uvw} = p_u \cdot i_u + p_v \cdot j_v + p_w \cdot k_w, \quad (2.2-3)$$

где  $p_u, p_v$  и  $p_w$  представляют собой составляющие вектора  $p$  вдоль осей  $OU, OV$  и  $OW$  соответственно, или проекции вектора  $p$  на эти оси. Таким образом, используя определение скалярного произведения и равенство (2.2-3), получаем

$$\begin{aligned} p_x &= i_x \cdot p = i_x \cdot i_u \cdot p_u + i_x \cdot j_v \cdot p_v + i_x \cdot k_w \cdot p_w, \\ p_y &= j_y \cdot p = j_y \cdot i_u \cdot p_u + j_y \cdot j_v \cdot p_v + j_y \cdot k_w \cdot p_w, \\ p_z &= k_z \cdot p = k_z \cdot i_u \cdot p_u + k_z \cdot j_v \cdot p_v + k_z \cdot k_w \cdot p_w, \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}. \quad (2.2-5)$$

С учетом этого выражения матрица  $R$  в равенстве (2.2-2) примет вид

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix}. \quad (2.2-6)$$

Аналогично, координаты  $p_{uvw}$  можно получить из координат  $p_{xyz}$ :

$$p_{uvw} = Q \cdot p_{xyz}, \quad (2.2-7)$$

$$\text{или} \quad \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}. \quad (2.2-8)$$

Поскольку операция скалярного произведения коммутативна, то из соотношений (2.2-6) — (2.2-8) следует

$$Q = R^{-1} = R^T, \quad (2.2-9)$$

$$QR = R^T R = R^{-1} \cdot R = I_3, \quad (2.2-10)$$

где  $I_3$  — единичная матрица размерностью  $3 \times 3$ . Преобразование, определяемое формулой (2.2-2) или (2.2-7), называется ортогональным преобразованием, а поскольку все векторы, входящие в скалярные произведения, единичные, его также называют ортонормальным преобразованием.

Особый интерес представляют матрицы поворота системы  $OUVW$  относительно каждой из трех основных осей системы  $OXYZ$ . Если положение системы  $OUVW$  в пространстве изменяется за счет поворота этой системы на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ , то в системе отсчета  $OXYZ$  изменятся и координаты  $(p_x, p_y, p_z)^T$  точки  $p_{uvw}$ , имеющей в системе  $OUVW$  неизменные координаты  $(p_u, p_v, p_w)$ . Соответствующая матрица преобразования  $R_{x, \alpha}$  называется матрицей поворота вокруг оси  $OX$  на угол  $\alpha$ . Основываясь на полученных выше результатах, для матрицы  $R_{x, \alpha}$  имеем

$$p_{xyz} = R_{x, \alpha} \cdot p_{uvw}, \quad (2.2-11)$$

причем  $i_x \equiv i_u$ , и

$$R_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.2-12)$$

Аналогично, трехмерные (размерностью  $3 \times 3$ ) матрицы поворота вокруг оси  $OY$  на угол  $\varphi$  и вокруг оси  $OZ$  на угол  $\theta$  имеют

соответственно вид (рис. 2.3):

$$R_{y, \varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad R_{z, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-13)$$

Матрицы  $R_{x, \alpha}$ ,  $R_{y, \varphi}$  и  $R_{z, \theta}$  называются *матрицами элементарных поворотов*. Любые другие матрицы конечных поворотов можно получить, используя матрицы элементарных поворотов. **Пример.** В повернутой системе координат  $OUVW$  заданы две точки  $a_{uvw} = (4, 3, 2)^T$  и  $b_{uvw} = (6, 2, 4)^T$ . Требуется определить координаты  $a_{xyz}$  и  $b_{xyz}$  этих точек в абсолютной системе координат, если система  $OUVW$  повернута относительно оси  $OZ$  на угол  $60^\circ$ .

**Решение:**  $a_{xyz} = R_{z, 60^\circ} \cdot a_{uvw}$  и  $b_{xyz} = R_{z, 60^\circ} \cdot b_{uvw}$ .

$$a_{xyz} = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0,5) + 3(-0,866) + 2(0) \\ 4(0,866) + 3(0,5) + 2(0) \\ 4(0) + 3(0) + 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,598 \\ 4,964 \\ 2,0 \end{bmatrix},$$

$$b_{xyz} = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,268 \\ 6,196 \\ 4,0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,  $a_{xyz}$  и  $b_{xyz}$  в абсолютной системе координат равны соответственно  $(-0,598, 4,964, 2,0)^T$  и  $(1,268, 6,196, 4,0)^T$ . **Пример.** По известным координатам точек  $a_{xyz} = (4, 3, 2)^T$  и  $b_{xyz} = (6, 2, 4)^T$  в абсолютной системе отсчета требуется определить соответствующие координаты в системе  $OUVW$ , повернутой относительно оси  $OZ$  на  $60^\circ$ .

**Решение.**  $a_{uvw} = (R_{z, 60^\circ})^T \cdot a_{xyz}$  и  $b_{uvw} = (R_{z, 60^\circ})^T \cdot b_{xyz}$ ,

$$a_{uvw} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,866 & 0 \\ -0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0,5) + 3(0,866) + 2(0) \\ 4(-0,866) + 3(0,5) + 2(0) \\ 4(0) + 3(0) + 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,598 \\ -1,964 \\ 2,0 \end{bmatrix},$$

$$b_{uvw} = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,866 & 0 \\ -0,866 & 0,500 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,732 \\ -4,196 \\ 4,0 \end{bmatrix}.$$

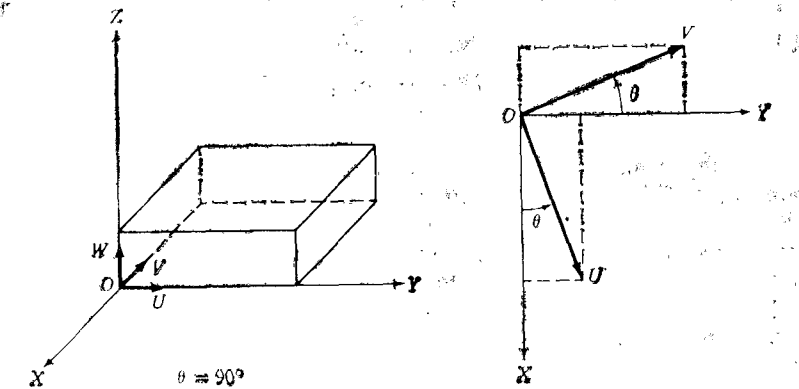
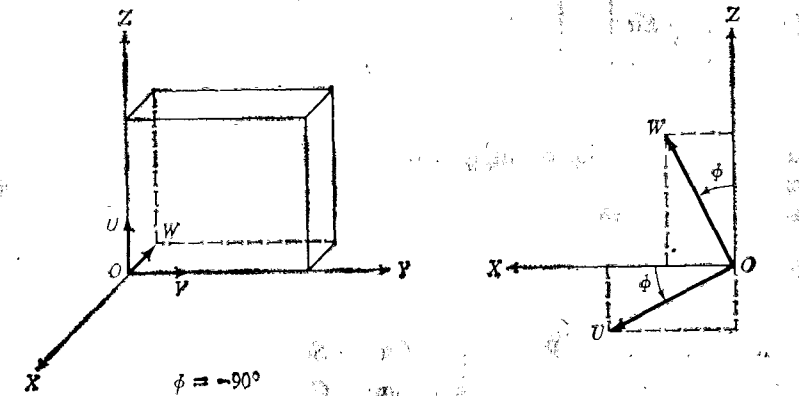
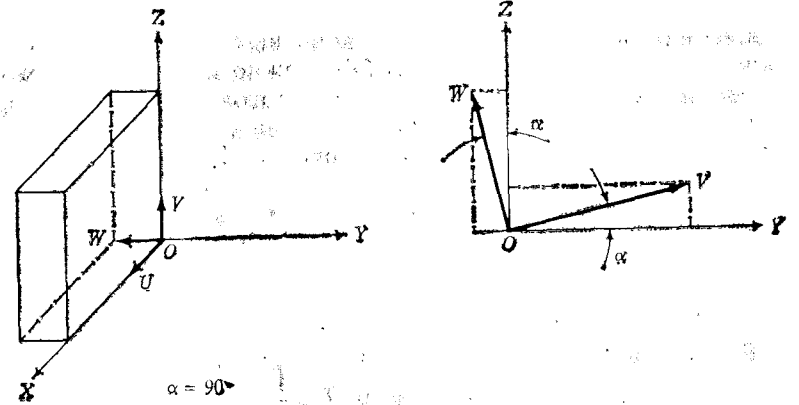


Рис. 2.3. Вращающаяся система координат.



### 2.2.2. Матрицы сложных поворотов

Описание последовательности конечных поворотов относительно основных осей системы  $OXYZ$  можно получить путем перемножения матриц элементарных поворотов. Поскольку операция перемножения матриц некоммукативна, здесь существенна последовательность выполнения поворотов. Например, матрица поворота, представляющего собой результат последовательного выполнения поворотов сначала на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ , затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OZ$ , затем на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OY$ , имеет вид

$$R = R_{y, \varphi} R_{z, \theta} \cdot R_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & S\varphi S\alpha - C\varphi S\theta C\alpha & C\varphi S\theta S\alpha + S\varphi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\varphi C\theta & C\varphi C\theta C\alpha + C\varphi C\alpha & C\varphi C\alpha - S\varphi S\theta S\alpha \end{bmatrix}, \quad (2.2-14)$$

где  $C\varphi = \cos \varphi$ ;  $S\varphi = \sin \varphi$ ;  $C\theta = \cos \theta$ ,  $S\theta = \sin \theta$ ;  $C\alpha = \cos \alpha$ ,  $S\alpha = \sin \alpha$ . Она отличается от матрицы, описывающей результат поворота сначала на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OY$ , затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OZ$  и, наконец, на угол  $\alpha$  относительно оси  $OX$ . Во втором случае результирующая матрица поворота имеет вид

$$R = R_{x, \alpha} \cdot R_{z, \theta} \cdot R_{y, \varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta C\varphi & -S\theta & C\theta S\varphi \\ C\alpha S\theta C\varphi + S\alpha S\varphi & C\alpha C\theta & C\alpha S\theta S\varphi - S\alpha C\varphi \\ S\alpha S\theta C\varphi - C\alpha S\varphi & S\alpha C\theta & S\alpha S\theta S\varphi - C\alpha C\varphi \end{bmatrix}. \quad (2.2-15)$$

Наряду с вращением относительно осей абсолютной системы координат  $OXYZ$  подвижная система отсчета  $OUVW$  может совершать повороты вокруг собственных осей. В этом случае результирующая матрица поворота может быть получена с использованием следующих простых правил.

1. Вначале обе системы координат совпадают, и, следовательно, матрица поворота представляет собой единичную матрицу размерностью  $3 \times 3$ .

2. Если подвижная система координат  $OUVW$  совершает поворот вокруг одной из основных осей системы  $OXYZ$ , матрицу

предыдущего результирующего поворота надо умножить слева на соответствующую матрицу элементарного поворота.

3. Если подвижная система координат  $OUVW$  совершает поворот вокруг одной из своих основных осей, матрицу предыдущего результирующего поворота надо умножить справа на соответствующую матрицу элементарного поворота.

**Пример.** Требуется найти матрицу поворота, являющегося результатом последовательного выполнения поворотов сначала на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OY$ , затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OZ$  и на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ .

*Решение:*

$$R = R_{y, \varphi} \cdot I_3 \cdot R_{z, \theta} \cdot R_{x, \alpha} = R_{y, \varphi} \cdot R_{z, \theta} \cdot R_{x, \alpha} = \\ = \begin{bmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & S\varphi S\alpha - C\varphi S\theta C\alpha & C\varphi S\theta S\alpha + S\varphi C\alpha \\ S\theta & C\theta C\alpha & -C\theta S\alpha \\ -S\varphi C\theta & S\varphi S\theta C\alpha + C\varphi S\alpha & C\varphi C\alpha - S\varphi S\theta S\alpha \end{bmatrix}.$$

Этот пример построен так, что матрица результирующего поворота такая же, как в выражении (2.2-14), однако последовательность поворотов отличается от последовательности, результатом которой является выражение (2.2-14).

### 2.2.3. Матрица поворота вокруг произвольной оси

В ряде случаев подвижная система координат  $OUVW$  может совершать поворот на угол  $\varphi$  относительно произвольной оси  $g$ , представляющей собой единичный вектор с компонентами  $r_x$ ,  $r_y$  и  $r_z$ , выходящий из начала координат  $O$ . Преимущество такого поворота состоит в том, что для некоторых угловых движений последовательность поворотов относительно основных осей систем координат  $OXYZ$  и/или  $OUVW$  можно заменить одним поворотом системы  $OUVW$  вокруг оси  $g$ . Чтобы получить матрицу поворота  $R_{g, \varphi}$ , можно сначала произвести ряд поворотов относительно осей системы  $OXYZ$ , чтобы совместить ось  $g$  с осью  $OZ$ . Затем произведем требуемый поворот вокруг оси  $g$  на угол  $\varphi$  и опять ряд поворотов относительно осей системы  $OXYZ$ , возвращающих ось  $OZ$  в исходное положение. Из рис. 2.4 видно, что совмещение осей  $OZ$  и  $g$  может быть реализовано с помощью поворота на угол  $\alpha$  относительно оси  $OX$  (ось  $g$  в результате окажется в плоскости  $XZ$ ), а затем на угол  $-\beta$  вокруг оси  $OY$  (в результате оси  $OZ$  и  $g$  совпадут). После поворота на угол  $\varphi$  относительно  $OZ$  или  $g$

произведем указанную выше последовательность поворотов, но в обратном порядке и изменим при этом знаки углов поворота

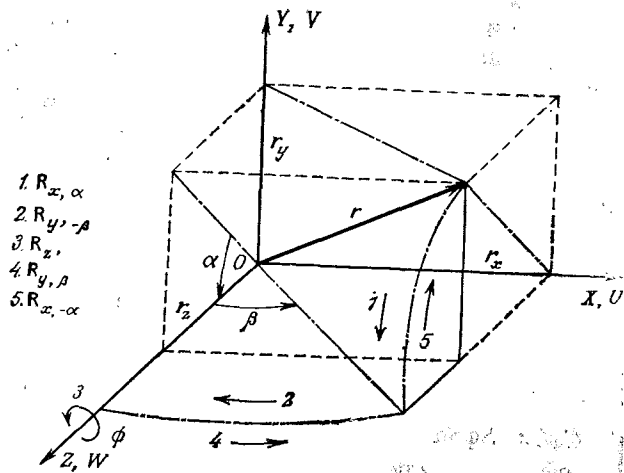


Рис. 2.4. Вращение вокруг произвольной оси.

на противоположные. Результирующая матрица поворота равна

$$R_{r, \varphi} = R_{x, -\alpha} \cdot R_{y, \beta} \cdot R_{z, \varphi} \cdot R_{y, -\beta} \cdot R_{x, \alpha} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & S\alpha \\ 0 & -S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} C\beta & 0 & -S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

Из рис. 2.4 легко определить, что

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}},$$

$$\sin \beta = r_x, \quad \cos \beta = \sqrt{r_y^2 + r_z^2}.$$

Подстановка этих равенств в предыдущее выражение для  $R_{r, \varphi}$  дает

$$R_{r, \varphi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\varphi + C\varphi & r_x r_y V\varphi - r_z S\varphi & r_x r_z V\varphi + r_y S\varphi \\ r_x r_y V\varphi + r_z S\varphi & r_y^2 V\varphi + C\varphi & r_y r_z V\varphi - r_x S\varphi \\ r_x r_z V\varphi - r_y S\varphi & r_y r_z V\varphi + r_x S\varphi & r_z^2 V\varphi + C\varphi \end{bmatrix}, \quad (2.2-16)$$

где  $V\varphi = \text{vers } \varphi = 1 - \cos \varphi$ . Это очень полезная матрица поворота.

**Пример.** Найти матрицу поворота  $R_{r, \varphi}$ , задающую поворот на угол  $\varphi$  вокруг вектора  $r = (1, 1, 1)^T$ .

**Решение.** Поскольку вектор  $r$  не является единичным, нужно нормировать его и определить после этого его координаты в системе отсчета  $OXYZ$ . Тем самым

$$r_x = \frac{1}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad r_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad r_z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя эти значения в равенство (2.2-16), получим матрицу  $R_{r, \varphi}$ :

$$R_{r, \varphi} = \begin{bmatrix} 1/3V\varphi + C\varphi & 1/3V\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}S\varphi & 1/3V\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}S\varphi \\ 1/3V\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}S\varphi & 1/3V\varphi + C\varphi & 1/3V\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}S\varphi \\ 1/3V\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}S\varphi & 1/3V\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}S\varphi & 1/3V\varphi + C\varphi \end{bmatrix}$$

## 2.2.4. Представление матриц поворота через углы Эйлера

Матричное описание вращения твердого тела упрощает многие операции; однако, для того чтобы полностью описать ориентацию вращающегося твердого тела, необходимо использовать все девять элементов матрицы поворота. Непосредственно эти элементы не составляют полной системы обобщенных координат, с помощью которых можно описать ориентацию вращающегося твердого тела относительно абсолютной системы координат. В качестве обобщенных координат можно использовать углы Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$  и  $\psi$ . Существует много различных систем углов Эйлера и все они описывают ориентацию твердого тела относительно некоторой заданной системы координат. Три наиболее часто используемые системы углов Эйлера представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1. Три системы углов Эйлера

	1	2	3
Последовательность поворотов	На $\varphi$ вокруг оси OZ	На $\varphi$ вокруг оси OZ	На $\varphi$ вокруг оси OX
	На $\theta$ вокруг оси OU	На $\theta$ вокруг оси OV	На $\theta$ вокруг оси OY
	На $\psi$ вокруг оси OW	На $\psi$ вокруг оси OW	На $\psi$ вокруг оси OZ

Первая из рассматриваемых систем углов Эйлера обычно используется при описании движения гироскопов и соответствует следующей последовательности поворотов (рис. 2.5):

1. Поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ$ .
2. Поворот на угол  $\theta$  вокруг повернутой оси  $OU(R_{u, \theta})$ .

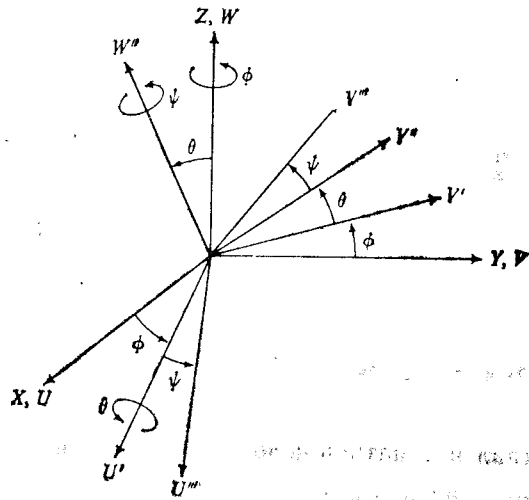


Рис. 2.5. Первая система углов Эйлера.

3. Наконец, поворот на угол  $\psi$  вокруг повернутой оси  $OW(R_{w, \psi})$ .  
Результатирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \theta, \psi} &= R_{z, \varphi} R_{u, \theta} R_{w, \psi} = \\ &= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta C\psi - S\varphi C\theta S\psi & -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi & S\varphi S\theta \\ S\varphi C\theta C\psi + C\varphi C\theta S\psi & -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi & -C\varphi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2-17)$$

Поворот, описываемый матрицей  $R_{\varphi, \theta, \psi}$ , может быть также получен в результате выполнения последовательности следующих поворотов вокруг осей неподвижной системы координат: сначала на угол  $\psi$  вокруг оси  $OZ$ , затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OX$  и, наконец, на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ$ .

На рис. 2.6 изображена вторая система углов Эйлера, определяемая следующей последовательностью поворотов:

1. Поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ(R_{z, \varphi})$ .

2. Поворот на угол  $\theta$  вокруг повернутой оси  $OV(R_{v, \theta})$ .
3. Наконец, поворот на угол  $\psi$  вокруг повернутой оси  $OW(R_{w, \psi})$ .  
Результатирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \theta, \psi} &= R_{z, \varphi} \cdot R_{v, \theta} \cdot R_{w, \psi} = \\ &= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta C\psi - C\varphi S\psi & -C\varphi C\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta \\ S\varphi C\theta C\psi + C\varphi S\psi & -S\varphi C\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta \\ -S\theta C\psi & S\theta S\psi & C\theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2-18)$$

Поворот, описываемый матрицей  $R_{\varphi, \theta, \psi}$  для этой системы углов Эйлера, может быть получен также в результате выполне-

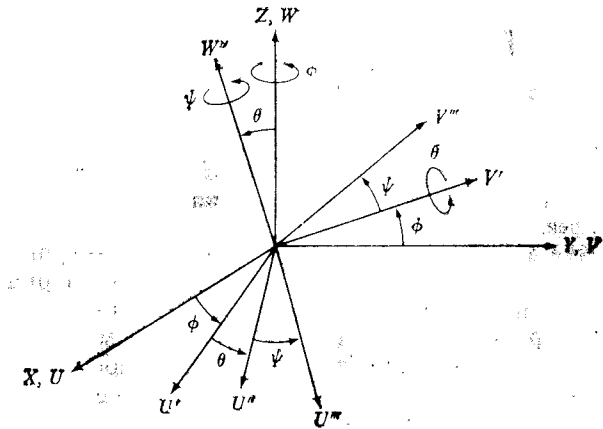


Рис. 2.6. Вторая система углов Эйлера.

ния следующей последовательности поворотов вокруг осей неподвижной системы координат: на угол  $\psi$  вокруг оси  $OZ$ , затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OY$  и, наконец, на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ$ .

Еще одну систему углов Эйлера составляют так называемые углы крена, тангажа и рысканья. Эти углы обычно применяются в авиационной технике при описании движения аппаратов.

Они соответствуют следующей последовательности поворотов:

1. Поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $OX(R_{x, \psi})$  (рысканье).
2. Поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $OY(R_{y, \theta})$  (тангаж).
3. Поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ(R_{z, \varphi})$  (крен).

Результирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\varphi, \theta, \psi} &= \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x = \\ &= \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\psi & -S\psi \\ 0 & S\psi & C\psi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & C\varphi S\theta S\psi - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta C\psi + S\varphi S\psi \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta C\psi - C\varphi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}. \quad (2.2-19) \end{aligned}$$

Поворот, описываемый матрицей  $\mathbf{R}_{\varphi, \theta, \psi}$  в переменных крен, тангаж, рысканье, может быть также получен в результате выполнения следующей последовательности поворотов вокруг осей абсолютной и подвижной систем координат: на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OZ$ , затем на угол  $\theta$  вокруг повернутой оси  $OV$  и, наконец, на угол  $\psi$  вокруг повернутой оси  $OU$  (рис. 2.7).<sup>1)</sup>

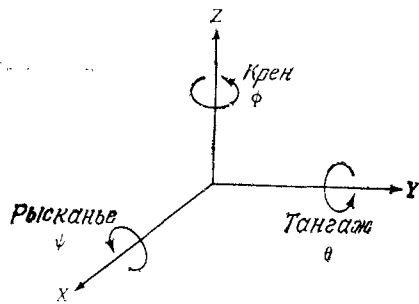


Рис. 2.7. Крен, тангаж, рысканье (третья система углов Эйлера).

### 2.2.5. Геометрический смысл матриц поворота

Выясним теперь геометрический смысл матриц поворота.

Пусть точка  $p$  в системе отсчета  $OUVW$  имеет координаты  $(1, 0, 0)$ , т. е.  $p_{uvw} = i_u$ . Тогда первый столбец матрицы поворота представляет собой координаты этой точки относительно системы отсчета  $OXYZ$ . Аналогично, выбирая в качестве  $p$  векторы  $(0, 1, 0)^T$  и  $(0, 0, 1)^T$ , легко видеть, что второй и третий столбцы матрицы поворота представляют собой координаты единичных векторов в направлении соответственно осей  $OV$  и  $OW$  системы  $OUVW$  относительно системы отсчета  $OXYZ$ . Таким образом, если заданы абсолютная система отсчета  $OXYZ$  и матрица поворота, то векторы-столбцы этой матрицы задают в системе  $OXYZ$  координаты единичных векторов в направлении основных осей системы  $OUVW$ . Это позволяет определить положение осей системы координат  $OUVW$  относительно абсолютной системы координат. Итак, матрица поворота определяет положение основных осей повернутой системы координат относительно абсолютной системы координат.

<sup>1)</sup> В принятой авторами системе координат продольная ось аппарата или сочленения совпадает с осью  $Z$ .— *Прим. ред.*

Поскольку операция обращения матрицы поворота совпадает с операцией транспонирования, то векторы-строки матрицы поворота задают направление основных осей абсолютной системы координат  $OXYZ$  в повернутой системе координат  $OUVW$ . Такая геометрическая интерпретация матрицы поворота дает ключ к решению многих задач кинематики манипулятора. Ниже приводится ряд полезных свойств матриц поворота.

1. Каждый столбец матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси повернутой системы отсчета, заданный своими координатами относительно абсолютной системы координат. Каждая строка матрицы поворота представляет собой единичный вектор в направлении соответствующей оси абсолютной системы координат, заданный своими координатами относительно повернутой системы отсчета  $OUVW$ .

2. Поскольку каждый столбец и строка представляют собой координаты единичного вектора, длина векторов, определяемых строками и столбцами матрицы поворота, равна 1. Это свойство непосредственно следует из определения ортонормированной системы координат. Далее, детерминант матрицы поворота равен +1 для правосторонней системы отсчета и -1 — для левосторонней.

3. Поскольку столбцы (строки) матрицы поворота являются векторами, составляющими ортонормированный базис, скалярное произведение векторов, определяемых двумя различными столбцами (строками), равно нулю.

4. Операция обращения матрицы поворота совпадает с операцией транспонирования:  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$  и  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_3$ , где  $\mathbf{I}_3$  — единичная матрица размерностью  $3 \times 3$ . Свойства 3 и 4 особенно полезны для проверки результатов умножения двух матриц поворота и при поиске строки или столбца матрицы поворота, в котором сделана ошибка.

**Пример.** Координатные оси  $OU$ ,  $OV$  и  $OW$  повернуты на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ . Определить координаты единичных векторов в направлении осей абсолютной системы отсчета относительно повернутой системы отсчета  $OUVW$ .

**Решение.** Единичные векторы в направлении повернутых координатных осей в повернутой системе отсчета имеют координаты  $i_u = (1, 0, 0)^T$ ,  $j_v = (0, 1, 0)^T$ ,  $k_w = (0, 0, 1)^T$ . Тогда исходные единичные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} i_x &= 1i_u + 0j_v + 0k_w = (1, 0, 0)^T, \\ j_y &= 0i_u + \cos \alpha j_v - \sin \alpha k_w = (0, \cos \alpha, -\sin \alpha)^T, \\ k_z &= 0i_u + \sin \alpha j_v + \cos \alpha k_w = (0, \sin \alpha, \cos \alpha)^T. \end{aligned}$$

Используя свойство 1 и рассматривая эти векторы как строки матрицы поворота, можно воссоздать матрицу  $\mathbf{R}_{x, \alpha}$ , которая бу-

дет иметь следующий вид:

$$R_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом транспонирования матрицы, входящей в равенство (2.2-12).

### 2.2.6. Однородные координаты и матрицы преобразований

Поскольку трехмерная матрица поворота не несет информации о поступательном перемещении и используемом масштабе, вектор координат  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$  в трехмерном пространстве дополняют четвертой координатой (или компонентой) так, что он принимает вид  $\hat{\mathbf{p}} = (\omega p_x, \omega p_y, \omega p_z, \omega)^T$ . В этом случае говорят, что вектор  $\hat{\mathbf{p}}$  выражен в однородных координатах. В этом разделе для обозначения того, что евклидов вектор выражен в однородных координатах, мы будем его записывать в виде  $\hat{\mathbf{p}}$ . В дальнейшем, если это не приведет к путанице, такие «крышки» над буквами будут опущены. Описание точек трехмерного пространства однородными координатами позволяет ввести в рассмотрение матричные преобразования, содержащие одновременно поворот, параллельный перенос, изменение масштаба и преобразование перспективы. В общем случае изображение  $N$ -мерного вектора вектором размерностью  $N + 1$  называется *представлением в однородных координатах*. При таком представлении преобразование  $N$ -мерного вектора производится в  $(N + 1)$ -мерном пространстве, а физический  $N$ -мерный вектор получается делением однородных координат на  $(N + 1)$ -ю компоненту  $\omega$ . Так, вектор  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$  положения в трехмерном пространстве в однородных координатах представляется расширенным вектором  $(\omega p_x, \omega p_y, \omega p_z, \omega)^T$ . Физические координаты связаны с однородными следующим образом:

$$p_x = \frac{\omega p_x}{\omega}, \quad p_y = \frac{\omega p_y}{\omega}, \quad p_z = \frac{\omega p_z}{\omega}.$$

Представление трехмерного вектора положения в однородных координатах не единственно. Например,  $\hat{\mathbf{p}}_1 = (\omega_1 p_x, \omega_1 p_y, \omega_1 p_z, \omega_1)^T$  и  $\hat{\mathbf{p}}_2 = (\omega_2 p_x, \omega_2 p_y, \omega_2 p_z, \omega_2)^T$  являются различными однородными представлениями одного и того же вектора положения  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ . Таким образом, четвертую компоненту  $\omega$  вектора однородных координат можно рассматривать как масштабирующий множитель. Если эта компонента равна 1 ( $\omega = 1$ ), то однородные координаты вектора положения совпадают с его физическими координатами. В робототехнике масштабирующий

множитель всегда выбирается равным 1, а в задачах машинной графики он принимает любые положительные значения.

Однородная матрица преобразования представляет собой матрицу размерностью  $4 \times 4$ , которая преобразует вектор, выраженный в однородных координатах, из одной системы отсчета в другую. Однородная матрица преобразования может быть разбита на четыре подматрицы:

$$\mathbf{T} = \left[ \begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{f}_{1 \times 3} & 1 \times 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \text{Поворот} & \text{Сдвиг} \\ \hline \text{Преобразование} & \text{Масштаби-} \\ \text{перспективы} & \text{рование} \end{array} \right]. \quad (2.2-20)$$

Верхняя левая подматрица размерностью  $3 \times 3$  представляет собой матрицу поворота; верхняя правая подматрица размерностью  $3 \times 1$  представляет собой вектор положения начала координат повернутой системы отсчета относительно абсолютной; нижняя левая подматрица размерностью  $1 \times 3$  задает преобразование перспективы; четвертый диагональный элемент является глобальным масштабирующим множителем. Однородная матрица преобразования позволяет выявить геометрическую связь между связанной системой отсчета  $OUVW$  и абсолютной системой  $OXYZ$ .

Если вектор  $\mathbf{p}$  трехмерного пространства выражен в однородных координатах (т. е.  $\hat{\mathbf{p}} = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$ ), то, используя понятие матрицы преобразования, можно сформировать однородную матрицу преобразования  $\mathbf{T}_{\text{пов}}$ , задающую преобразование поворота и имеющую размерность  $4 \times 4$ . Однородная матрица поворота получается соответствующим расширением обычной матрицы поворота, имеющей размерность  $3 \times 3$ . Так, однородное представление для матриц (2.2-12) и (2.2-13) имеет следующий вид:

$$\mathbf{T}_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{y, \varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{z, \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-21)$$

Эти матрицы размерностью  $4 \times 4$  называются *однородными матрицами элементарных поворотов*.

Верхняя правая подматрица однородной матрицы преобразования, имеющая размерность  $3 \times 1$ , задает параллельный пе-

ренос системы координат  $OUVW$  относительно абсолютной системы  $OXYZ$  на вектор  $(dx, dy, dz)^T$ :

$$T_{\text{сдв}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-22)$$

Эта матрица размерностью  $4 \times 4$  называется *однородной матрицей элементарного сдвига*.

Левая нижняя подматрица однородной матрицы преобразования размерностью  $1 \times 3$  определяет преобразование перспективы, используемое, как показано в гл. 7, в задачах машинного зрения и при калибровке изображений. Здесь элементы этой подматрицы нулевые, что соответствует нулевому преобразованию перспективы.

Диагональные элементы однородной матрицы преобразования определяют локальное и глобальное изменения масштаба. Первые три диагональных элемента задают локальное растяжение, или изменение масштаба:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-23)$$

Легко видеть, что значения координат претерпевают изменение масштаба, определяемое соответственно скалярами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Заметим, что матрицы элементарных поворотов  $T_{\text{пов}}$  не дают эффекта локального изменения масштаба.

Четвертый диагональный элемент определяет глобальное преобразование масштаба

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix}, \quad (2.2-24)$$

где  $s > 0$ . Физические декартовы координаты вектора будут равны

$$p_x = \frac{x}{s}, \quad p_y = \frac{y}{s}, \quad p_z = \frac{z}{s}, \quad \omega = \frac{s}{s} = 1. \quad (2.2-25)$$

Таким образом, четвертый диагональный элемент однородной матрицы преобразования определяет глобальное сжатие координат, если  $s > 1$ , и растяжение, если  $0 < s < 1$ .

Итак, однородная матрица преобразования переводит вектор,

заданный однородными координатами в системе отсчета  $OUVW$ , в абсолютную систему координат  $OXYZ$ , т. е. при  $\omega = 1$

$$\hat{p}_{xyz} = T \hat{p}_{uvw} \quad (2.2-26a)$$

и

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-26b)$$

## 2.2.7. Геометрический смысл однородной матрицы преобразования

В общем случае однородная матрица преобразования векторов трехмерного пространства может быть представлена так, как в равенстве (2.2-26b). Выберем в системе координат  $OUVW$  точку  $\mathbf{p}$ , имеющую однородные координаты  $(0, 0, 0, 1)^T$ , т. е.  $\mathbf{p}_{uvw}$  совпадает с началом системы координат  $OUVW$ . В этом случае верхняя правая подматрица размерностью  $3 \times 1$  характеризует положение точки начала системы координат  $OUVW$  в абсолютной системе отсчета  $OXYZ$ . Далее, выберем точку  $\mathbf{p}$  равной  $(1, 0, 0, 1)^T$ , т. е.  $\mathbf{p}_{uvw} \equiv \mathbf{i}_u$ . Кроме того, предположим, что начала обеих систем отсчета совпадают и расположены в точке  $O$ . Это приводит к тому, что все элементы верхней правой подматрицы, имеющей размерность  $3 \times 1$ , равны 0. Тогда первый столбец (или вектор  $\mathbf{n}$ ) однородной матрицы преобразования определяет координаты единичного вектора в направлении оси  $OU$  системы  $OUVW$  в системе отсчета  $OXYZ$ . Аналогично, полагая  $\mathbf{p}$  равным  $(0, 1, 0, 1)^T$  и  $(0, 0, 1, 1)^T$ , легко видеть, что второй столбец (или вектор  $\mathbf{s}$ ) и третий столбец (или вектор  $\mathbf{a}$ ) элементов однородной матрицы преобразования определяют соответственно координаты единичных векторов в направлении осей  $OV$  и  $OW$  системы  $OUVW$  в абсолютной системе отсчета. Таким образом, если задана абсолютная система отсчета  $OXYZ$  и однородная матрица преобразования  $T$ , то векторы-столбцы подматрицы поворота представляют собой единичные векторы в направлении основных осей системы  $OUVW$ , заданные своими координатами в абсолютной системе отсчета, т. е. задают ориентацию основных осей системы отсчета  $OUVW$  относительно абсолютной системы координат. Четвертый вектор-столбец однородной матрицы преобразования задает положение начала координат системы отсчета  $OUVW$  относительно абсолютной системы координат. Другими словами, однородная матрица преобразования в геометрическом смысле определяет расположение повернутой системы координат (положение и ориентацию) по отношению к абсолютной системе отсчета.

Поскольку операция обращения подматрицы поворота совпадает с операцией транспонирования, то векторы-строки подматрицы поворота задают положение основных осей абсолютной системы координат относительно повернутой системы координат  $OUVW$ . Однако для однородной матрицы операции обращения и транспонирования не совпадают. Положение начала абсолютной системы координат относительно системы координат  $OUVW$  можно определить лишь после того, как определена матрица, обратная матрице однородного преобразования. В общем случае такая матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ s_x & s_y & s_z & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ & & & -\mathbf{s}^T \mathbf{p} \\ & & \mathbf{R}_{3 \times 3}^T & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-27)$$

Таким образом, из равенства (2.2-27) видно, что векторы-столбцы матрицы, обратной к однородной матрице преобразования, определяют положение основных осей абсолютной системы отсчета относительно повернутой системы координат  $OUVW$ . Верхняя правая подматрица размерностью  $3 \times 1$  характеризует положение начала абсолютной системы координат относительно системы  $OUVW$ . Такая геометрическая интерпретация однородной матрицы преобразования будет часто использоваться в данной книге.

### 2.2.8. Однородная матрица композиции преобразований

Однородная матрица композиции преобразований (обозначим ее как матрицу  $\mathbf{T}$ ) может быть получена путем перемножения однородных матриц элементарных поворотов и сдвигов. Однако, поскольку операция умножения матриц некоммукативна, особое внимание следует обратить на порядок перемножения этих матриц. При определении однородной матрицы композиции преобразований будут полезны следующие правила:

1. Вначале обе системы координат совпадают, и, следовательно, однородная матрица преобразования представляет собой единичную матрицу  $\mathbf{I}_4$  размерностью  $4 \times 4$ .

2. Если подвижная система координат  $OUVW$  совершает поворот/сдвиг относительно осей системы отсчета  $OXYZ$ , однородную матрицу предыдущего результирующего преобразования надо умножить слева на соответствующую однородную матрицу элементарного поворота/сдвига.

3. Если подвижная система координат  $OUVW$  совершает поворот/сдвиг относительно одной из собственных основных осей, однородную матрицу предыдущего результирующего преобразования надо умножить справа на соответствующую однородную матрицу элементарного поворота/сдвига.

**Пример.** Две точки  $\mathbf{a}_{uvw} = (4, 3, 2)^T$  и  $\mathbf{b}_{uvw} = (6, 2, 4)^T$  требуется сместить на +5 единиц вдоль оси  $OX$  и на -3 единицы вдоль оси  $OZ$ . Используя соответствующую однородную матрицу преобразования, определить координаты точек  $\mathbf{a}_{xyz}$ ,  $\mathbf{b}_{xyz}$ , полученных в результате этих смещений.

*Решение.*

$$\hat{\mathbf{a}}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(1) + 1(5) \\ 3(1) + 1(0) \\ 2(1) + 1(-3) \\ 1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Смещенные точки имеют следующие координаты:

$$\mathbf{a}_{xyz} = (9, 3, -1)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_{xyz} = (11, 2, 1)^T.$$

**Пример.** Требуется определить матрицу  $\mathbf{T}$ , задающую преобразование, состоящее из поворота на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ , затем смещения на  $b$  единиц вдоль повернутой оси  $OV$ .

*Решение.* Эта задача, может быть, до некоторой степени искусственна, однако она иллюстрирует смысл основных компонент матрицы  $\mathbf{T}$ . Мы воспользуемся двумя подходами к ее решению. Первый из них противоречит принятому в этой книге стилю изложения, однако является весьма иллюстративным, второй соответствует общим принципам изложения и является более простым. После поворота  $\mathbf{T}_{x, \alpha}$  направление повернутой оси  $OV$  определяется (через векторы  $\mathbf{i}_x, \mathbf{j}_y, \mathbf{k}_z$  абсолютной системы отсчета) вектором  $\mathbf{j}_v = \cos \alpha \mathbf{j}_y + \sin \alpha \mathbf{k}_z$ , т. е. вторым столбцом равенства (2.2-21). Таким образом, сдвиг вдоль повернутой оси  $OV$  на  $b$  единиц равен  $b \mathbf{j}_v = b \cos \alpha \mathbf{j}_y + b \sin \alpha \mathbf{k}_z$  и матрица  $\mathbf{T}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{v, b} \mathbf{T}_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & b \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Второй подход состоит в том, чтобы, следуя изложенным выше правилам, увидеть, что поскольку матрица  $T_{x, \alpha}$  преобразует ось  $OY$  в ось  $OV$ , то прежний эффект достигается сдвигом вдоль оси  $OV$ :

$$T = T_{x, \alpha} T_{v, b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & b \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & b \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Пример.** Определить однородную матрицу преобразования  $T$ , задающую следующую последовательность преобразований: поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ , сдвиг на  $a$  единиц вдоль оси  $OX$ , сдвиг на  $d$  единиц вдоль оси  $OZ$  и затем поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $OZ$ .

*Решение.*

$$T = T_{z, \theta} T_{z, d} T_{x, a} T_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta & a \cos \theta \\ \sin \theta & \cos \alpha \cos \theta & -\sin \alpha \cos \theta & a \sin \theta \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Мы определили две системы координат — неподвижную абсолютную систему координат  $OXYZ$  и подвижную систему, совершающую вращательное и поступательное движение, — систему координат  $OUVW$ . Для описания взаимного пространственного положения этих систем координат была использована однородная матрица преобразования размерностью  $4 \times 4$ . Матрица однородного преобразования обладает тем свойством, что, воздействуя на вектор положения, выраженный в однородных координатах,

производит одновременно преобразования поворота, сдвига перспективы и глобальное изменение масштаба.

Если эти две системы координат связать со звеньями манипулятора, например с  $i$ -м и  $(i-1)$ -м звеньями соответственно, то система координат  $(i-1)$ -го звена будет абсолютной системой координат, а система координат  $i$ -го звена, если последнее движется, — подвижной системой координат. Используя матрицу  $T$ , мы по известным координатам  $p_i$  неподвижной относительно  $i$ -го звена точки  $p$  в системе  $OUVW$   $i$ -го звена можем получить координаты этой точки в системе координат  $OXYZ$ , связанной с  $(i-1)$ -м звеном в соответствии со следующей формулой:

$$p_{i-1} = T p_i, \quad (2.2-28)$$

где  $T$  — однородная матрица преобразования, устанавливающая связь между системами координат;  $p_i$  — расширенный вектор положения  $(x_i, y_i, z_i, 1)^T$ , определяющий однородные координаты точки в системе координат  $i$ -го звена;  $p_{i-1}$  — расширенный вектор положения  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$ , определяющий однородные координаты этой же точки  $p_i$  относительно системы координат  $(i-1)$ -го звена.

## 2.2.9. Звенья, сочленения и их параметры

Механический манипулятор состоит из звеньев, соединенных вращательными или поступательными сочленениями (рис. 2.8). Каждая пара, состоящая из звена и сочленения, обеспечивает одну степень свободы. Следовательно, манипулятор с  $N$  степенями свободы содержит  $N$  пар звено — шарнир, причем звено 0 соединено с основанием, где обычно размещается инерциальная система координат данной динамической системы, а последнее звено снабжено рабочим инструментом. Звенья и сочленения нумеруются по возрастанию от стойки к схвату манипулятора; так, сочленением 1 считается точка соединения звена 1 и опорной стойки. Каждое звено соединено не более чем с двумя другими так, чтобы не образовывалось замкнутых цепей.

В общем случае два звена соединяются элементарным сочленением, имеющим две соприкасающиеся поверхности, скользящие друг относительно друга. Известно всего шесть различных элементарных сочленений: вращательное, поступательное (призматическое), цилиндрическое, сферическое, винтовое и плоское (рис. 2.9). Из перечисленных типов сочленений в манипуляторах обычно используются только вращательное и поступательное.

В месте соединения двух звеньев определяется ось  $i$ -го сочленения (рис. 2.10). Эта ось имеет две пересекающиеся ее нормали, каждая из которых соответствует одному из звеньев. Относительное положение двух соединенных звеньев (звена  $i-1$  и звена  $i$ ) определяется величиной  $d_i$  — расстоянием между этими



нормальми, отсчитываемым вдоль оси сочленения. Присоединенный угол  $\theta_i$  между нормальми измеряется в плоскости, перпендикулярной оси сочленения. Таким образом,  $d_i$  и  $\theta_i$  можно назвать *расстоянием* и *углом между смежными звеньями*. Они определяют относительное положение соседних звеньев.

Звено  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ ) соединено не более чем с двумя звеньями ( $i - 1$ -м и  $i + 1$ -м звеньями); таким образом, в точках соединения  $i$ -го звена с двумя соседними определены две

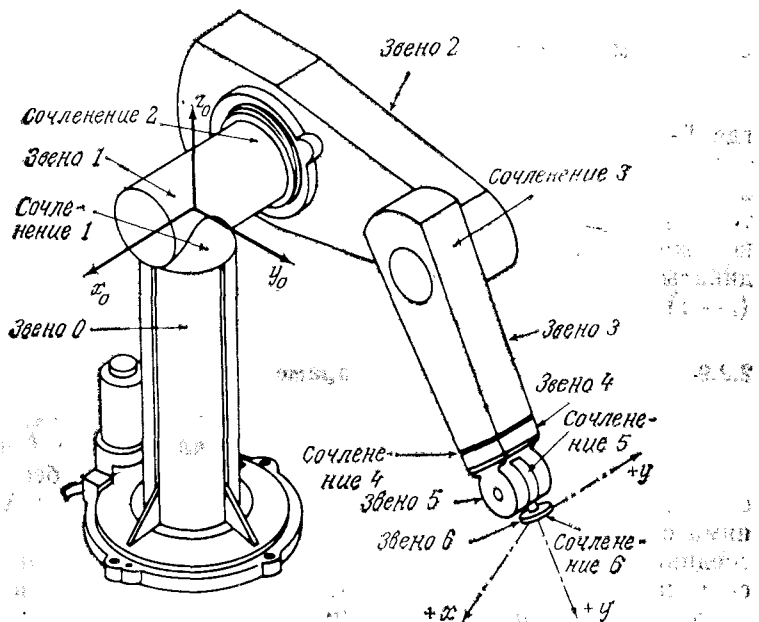


Рис. 2.8. Звенья и сочленения манипулятора Пума.

оси сочленений. Важное свойство звеньев с точки зрения кинематики состоит в том, что они сохраняют неизменной конфигурацию относительного расположения соседних сочленений, характеризуемую параметрами  $a_i$  и  $\alpha_i$ . В качестве параметра  $a_i$  выбрано кратчайшее расстояние между осями  $z_{i-1}$  и  $z_i$   $i$ -го и  $i + 1$ -го сочленений соответственно, измеряемое вдоль их общей нормали.  $\alpha_i$  — угол между осями сочленений, измеряемый в плоскости, перпендикулярной их общей нормали. Таким образом,  $a_i$  и  $\alpha_i$  можно рассматривать соответственно как *длину* и *угол скрутки  $i$ -го звена*. Эти параметры характеризуют конструктивные особенности  $i$ -го звена.

Итак, с каждым звеном манипулятора связаны четыре параметра:  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$ ,  $\theta_i$ . Если для этих параметров установить пра-

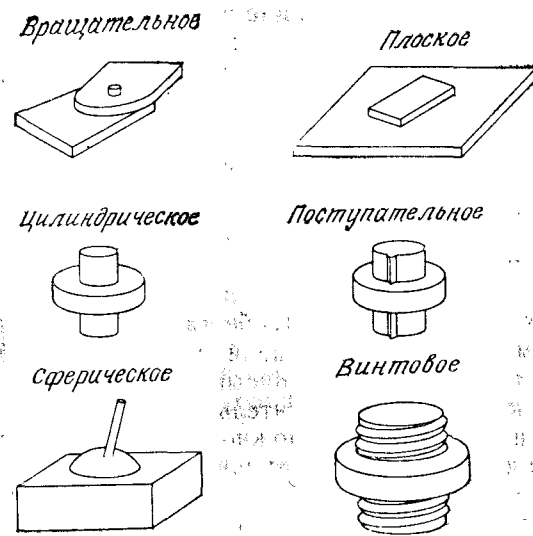


Рис. 2.9. Элементарные сочленения.

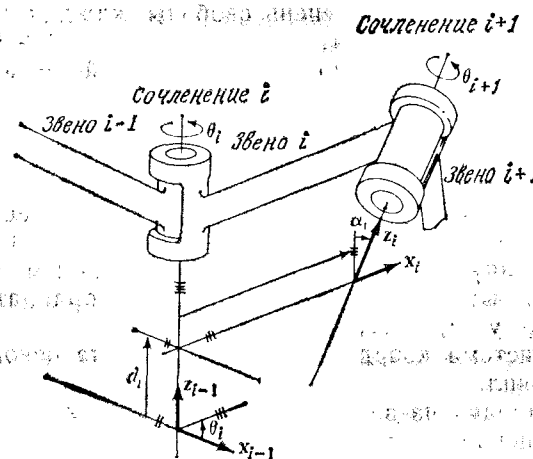


Рис. 2.10. Система координат звена и ее параметры.

вило выбора знаков, то они составят набор, достаточный для описания кинематической схемы каждого звена манипулятора. Заметим, что эти параметры можно разделить на две пары: параметры звена  $(a_i, \alpha_i)$ , которые характеризуют конструкцию звена, и параметры сочленения  $(d_i, \theta_i)$ , характеризующие относительное положение соседних звеньев.

## 2.2.10. Представление Денавита — Хартенберга

Для описания вращательных и поступательных связей между соседними звеньями Денавит и Хартенберг [57] предложили матричный метод последовательного построения систем координат, связанных с каждым звеном кинематической цепи. Смысл представления Денавита — Хартенберга (ДХ-представление) состоит в формировании однородной матрицы преобразования, имеющей размерность  $4 \times 4$  и описывающей положение системы координат каждого звена относительно системы координат предыдущего звена. Это дает возможность последовательно преобразовать координаты схвата манипулятора из системы отсчета, связанной с последним звеном, в базовую систему отсчета, являющуюся инерциальной системой координат для рассматриваемой динамической системы.

Кроме базовой системы координат для каждого звена на оси его сочленения определяется ортонормированная декартова система координат  $(x_i, y_i, z_i)$ <sup>1)</sup>, где  $i = 1, 2, \dots, n$ , а  $n$  равно числу степеней свободы манипулятора. Поскольку вращательное сочленение имеет только одну степень свободы, каждая система координат  $(x_i, y_i, z_i)$  манипулятора соответствует  $(i + 1)$ -у сочленению и связана с  $i$ -м звеном. Когда силовой привод возбуждает движение в  $i$ -м сочленении,  $i$ -е звено начинает двигаться относительно  $(i - 1)$ -го звена. Поскольку  $i$ -я система координат связана с  $i$ -м звеном, она движется вместе с ним. Таким образом,  $n$ -я система координат движется вместе с последним  $n$ -м звеном манипулятора. Базовой является нулевая система координат  $(x_0, y_0, z_0)$ , представляющая собой инерциальную систему координат манипулятора. Так, для шестизвонного манипулятора Пума должны быть определены семь систем координат, а именно  $(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_6, y_6, z_6)$ .

Каждая система координат формируется на основе следующих трех правил:

1. Ось  $z_{i-1}$  направлена вдоль оси  $i$ -го сочленения.
2. Ось  $x_i$  перпендикулярна оси  $z_{i-1}$  и направлена от нее.
3. Ось  $y_i$  дополняет оси  $x_i, z_i$  до правой декартовой системы координат.

<sup>1)</sup> В действительности  $(x_i, y_i, z_i)$  представляют собой единичные векторы, направленные вдоль основных осей  $i$ -й системы координат, но в данном случае так обозначается  $i$ -я система координат.

Эти правила оставляют свободу в выборе 0-й системы координат при условии, что ось  $z_0$  направлена вдоль оси первого сочленения. Последняя,  $n$ -я система координат также может быть выбрана в произвольной точке  $n$ -го звена при условии, что ось  $x_n$  перпендикулярна оси  $z_{n-1}$ .

ДХ-представление твердых звеньев зависит от четырех геометрических параметров, соответствующих каждому звену. Эти четыре параметра полностью описывают любое вращательное или поступательное движение и определяются в соответствии с рис. 2.10 следующим образом:

- $\theta_i$  — присоединенный угол — угол, на который надо повернуть ось  $x_{i-1}$  вокруг оси  $z_{i-1}$ , чтобы она стала сонаправлена с осью  $x_i$  (знак определяется в соответствии с правилом правой руки);
- $d_i$  — расстояние между пересечением оси  $z_{i-1}$  с осью  $x_i$  и началом  $(i - 1)$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси  $z_{i-1}$ ;
- $a_i$  — линейное смещение — расстояние между пересечением оси  $z_{i-1}$  с осью  $x_i$  и началом  $i$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси  $x_i$ , т. е. кратчайшее расстояние между осями  $z_{i-1}$  и  $z_i$ ;
- $\alpha_i$  — угловое смещение — угол, на который надо повернуть ось  $z_{i-1}$  вокруг оси  $x_i$ , чтобы она стала сонаправленной с осью  $z_i$  (знак определяется в соответствии с правилом правой руки).

Для вращательных сочленений параметры  $d_i, a_i$  и  $\alpha_i$  являются характеристиками сочленения, постоянными для данного типа робота. В то же время  $\theta_i$  является переменной величиной, изменяющейся при движении (вращении)  $i$ -го звена относительно  $(i - 1)$ -го. Для поступательных сочленений  $\theta_i, a_i$  и  $\alpha_i$  — характеристики сочленения, неизменные для данного робота, а  $d_i$  — переменная величина. Ниже в этой книге о величинах  $\theta_i$  (или  $d_i$ ) будем говорить как о присоединенных переменных, подразумевая тем самым, что они могут менять свои значения. Величины  $d_i, a_i, \alpha_i$ , если  $i$ -е сочленение вращательное, и  $\theta_i, a_i, \alpha_i$ , если оно поступательное, будем называть присоединенными параметрами, подчеркивая их постоянство.

Ниже в алгоритме 2.1 дано описание процедуры формирования последовательности согласованных систем координат, связанных со звеньями манипулятора. Алгоритм базируется на изложенных выше трех основных правилах построения ортонормированных систем координат звеньев и учитывает геометрический смысл параметров сочленений и звеньев. Примеры применения этого алгоритма для шестизвонного манипулятора Пума и для манипулятора, разработанного в Станфордском университете, приведены на рис. 2.11 и 2.12 соответственно.

**Алгоритм 2.1. Формирование систем координат звеньев.** Для каждого звена манипулятора с  $n$  степенями свободы этот алгоритм формирует ортонормированную систему координат. Выбор систем координат производится с учетом конфигурации манипулятора, сходной с конфигурацией человеческой руки. Системы

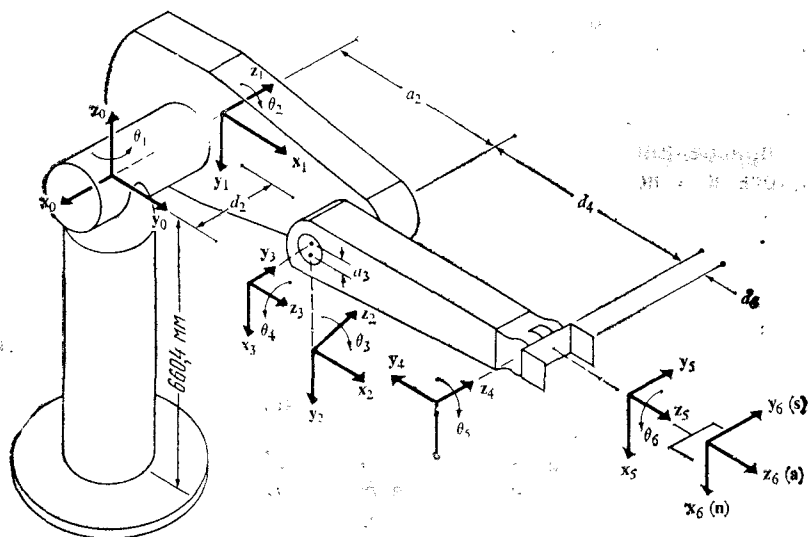


Рис. 2.11. Формирование систем координат звеньев для манипулятора Пума.

Параметры систем координат звеньев манипулятора Пума

Сочленение $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	Пределы изменения
1	90	-90	0	0	-160 — +160
2	0	0	431,8 мм	149,09 мм	-225 — 45
3	90	90	-20,32 мм	0	-45 — 225
4	0	-90	0	433,07 мм	-110 — 170
5	0	90	0	0	-100 — 100
6	0	0	0	56,25 мм	-266 — 266

координат нумеруются в порядке возрастания от основания к схвату манипулятора. Взаимное расположение соседних звеньев описывается однородной матрицей преобразования размерностью  $4 \times 4$ . Смысл такого построения систем заключается в том, что оно позволяет, как будет показано в следующих главах, выработать последовательную процедуру решения обратной задачи кинематики. Заметим, что предлагаемый способ выбора систем координат не является единственным.

**Д1. Формирование базовой системы координат.** Сформировать правую ортонормированную систему координат  $(x_0, y_0, z_0)$ , связанную с основанием, направив ось  $z_0$  вдоль оси 1-го

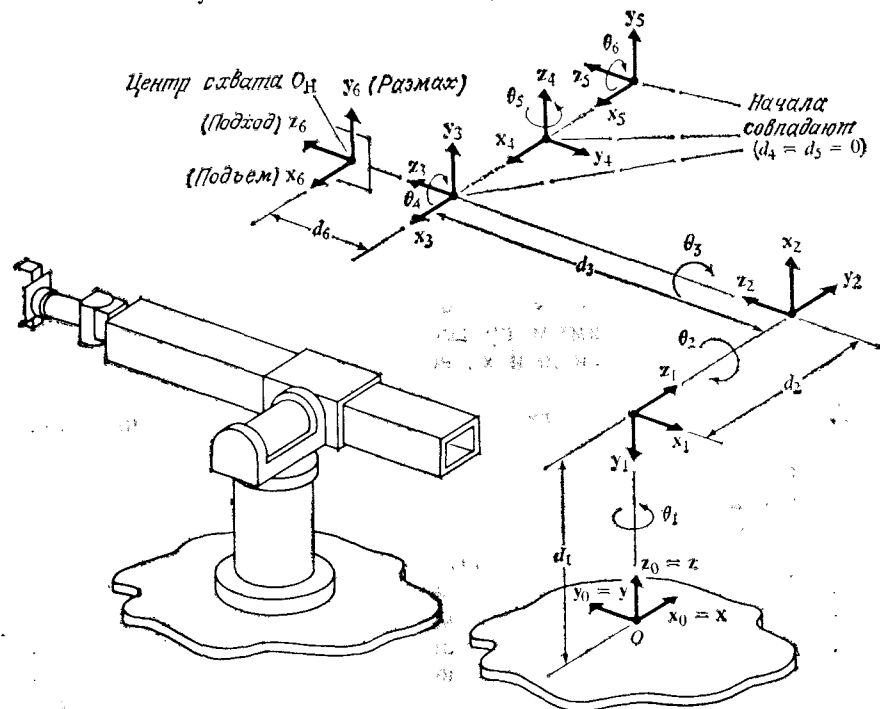


Рис. 2.12. Формирование систем координат звеньев для станфордского манипулятора.

Параметры систем координат звеньев станфордского манипулятора

Сочленение $i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$
1	$\theta_1 = -90$	-90	0	$d_1$
2	$\theta_2 = -90$	90	0	$d_2$
3	$\theta_3 = -90$	0	0	$d_3$
4	$\theta_4 = 0$	-90	0	0
5	$\theta_5 = 0$	90	0	0
6	$\theta_6 = 0$	0	0	$d_6$

сочленения к «плечу» манипулятора. Оси  $x_0$  и  $y_0$  можно выбрать произвольно при условии их перпендикулярности оси  $z_0$ .

**Д2. Начало и цикл.** Для всех  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) выполнить шаги Д3—Д6.

- Д3. **Формирование осей сочленений.** Направить ось  $z_i$  вдоль оси движения (вращательного или поступательного)  $i + 1$ -го сочленения. Для роботов с манипуляторами, имеющими конфигурацию левой-правой руки, оси  $z_1$  и  $z_2$  направлены от плеча и общего направления манипулятора.
- Д4. **Формирование начала  $i$ -й системы координат.** Расположить начало  $i$ -й системы координат на пересечении осей  $z_i$  и  $z_{i-1}$  или на пересечении общей нормали к осям  $z_i$  и  $z_{i-1}$  с осью  $z_i$ .
- Д5. **Формирование оси  $x_i$ .** Выбрать единичный вектор  $x_i$  следующим образом:  $x_i = \pm (z_{i-1} \times z_i) / \|z_{i-1} \times z_i\|$  или вдоль общего перпендикуляра к осям  $z_{i-1}$  и  $z_i$ , если они параллельны.
- Д6. **Формирование оси  $y_i$ .** Положить  $y_i = +(z_i \times x_i) / \|z_i \times x_i\|$ , получив тем самым правостороннюю систему координат. (Продолжить оси  $z_i$  и  $x_i$ , если это необходимо для шагов Д9—Д12.)
- Д7. **Формирование системы координат схвата.** Как правило,  $n$ -е сочленение является вращательным. Сформировать ось  $z_n$ , направив ее вдоль оси  $z_{n-1}$  и от робота. Выбрать ось  $x_n$  так, чтобы она была перпендикулярна осям  $z_{n-1}$  и  $z_n$ . Ось  $y_n$  дополняет систему до правой тройки (более подробно см. разд. 2.2.11).
- Д8. **Определение параметров звеньев и сочленений.** Для каждого  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) выполнить шаги Д9—Д12.
- Д9. **Определение  $d_i$ .**  $d_i$  представляет собой расстояние от начала ( $i - 1$ )-й системы координат до пересечения оси  $z_{i-1}$  с осью  $x_i$ , отсчитываемое вдоль оси  $z_{i-1}$ . Если  $i$ -е сочленение — поступательное, то  $d_i$  — присоединенная переменная.
- Д10. **Определение  $a_i$ .**  $a_i$  — расстояние между пересечением оси  $z_{i-1}$  с осью  $x_i$  и началом  $i$ -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси  $x_i$ .
- Д11. **Определение  $\theta_i$ .**  $\theta_i$  — угол, на который нужно повернуть ось  $x_{i-1}$  вокруг оси  $z_{i-1}$ , чтобы она стала сонаправлена с осью  $x_i$ . Если  $i$ -е сочленение — вращательное, то  $\theta_i$  — присоединенная переменная.
- Д12. **Определение  $\alpha_i$ .**  $\alpha_i$  — угол, на который надо повернуть ось  $z_{i-1}$  вокруг оси  $x_i$ , чтобы она стала сонаправлена с осью  $z_i$ .

Как только ДХ-системы координат сформированы для всех звеньев, не составляет труда построить однородные матрицы преобразования, связывающие  $i$ -ю и  $(i - 1)$ -ю системы координат. Из рис. 2.10 видно, что координаты точки  $r_i$ , заданные в  $i$ -й системе координат, можно преобразовать в координаты  $r_{i-1}$  этой же точки относительно  $(i - 1)$ -й системы координат, выполняя последовательность следующих операций:

1. Поворот вокруг оси  $z_{i-1}$  на угол  $\theta_i$ , чтобы ось  $x_{i-1}$  стала сонаправлена с осью  $x_i$ .
2. Сдвиг вдоль оси  $z_{i-1}$  на расстояние  $d_i$ , чтобы совместить оси  $x_{i-1}$  и  $x_i$ .
3. Сдвиг вдоль оси  $x_i$  на расстояние  $a_i$ , чтобы совместить начала чала координат.
4. Поворот вокруг оси  $x_i$  на угол  $\alpha_i$ , в результате которого достигается совпадение систем координат.

Каждую из этих четырех операций можно описать однородной матрицей элементарного поворота-сдвига, а произведение таких матриц даст однородную матрицу сложного преобразования  ${}^{i-1}A_i$ , называемую ДХ-матрицей преобразования для смежных систем координат с номерами  $i$  и  $i - 1$ . Таким образом, получаем

$${}^{i-1}A_i = T_{z, d} T_{z, \theta} T_{x, a} T_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-29)$$

Используя равенство (2.2-27), найдем, что матрица, обратная к  ${}^{i-1}A_i$ , имеет вид

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1} = {}^iA_{i-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-30)$$

где  $\alpha_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$  — константы, а  $\theta_i$  — присоединенная переменная, если рассматриваемое сочленение — вращательное.

Для поступательного сочленения присоединенной переменной является  $d_i$ , а  $\alpha_i$ ,  $a_i$  и  $\theta_i$  — константы. В этом случае  ${}^{i-1}A_i$  при-

нимает вид

$${}^{i-1}A_i = T_{z, \theta} T_{z, d} T_{x, \alpha} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-31)$$

а матрица, обратная к  ${}^{i-1}A_i$ , равна

$$[{}^{i-1}A_i]^{-1} = {}^iA_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & -d_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-32)$$

Используя матрицу  ${}^{i-1}A_i$ , можно связать однородные координаты  $p_i$  точки  $p$  относительно  $i$ -й системы координат (точка  $p$  покоится в  $i$ -й системе координат) с однородными координатами этой точки относительно  $(i-1)$ -й системы отсчета, связанной с  $(i-1)$ -м звеном. Эта связь устанавливается равенством

$$p_{i-1} = {}^{i-1}A_i p_i, \quad (2.2-33)$$

где  $p_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T$  и  $p_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ .

Для шестизвенного манипулятора Пума были определены шесть матриц  ${}^{i-1}A_i$ , соответствующие показанным на рис. 2.11 системам координат. Эти матрицы представлены ниже.

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & a_3 C_3 \\ S_3 & 0 & -C_3 & a_3 S_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_1 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 D_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 - C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$C_i \equiv \cos \theta_i; \quad S_i \equiv \sin \theta_i; \quad C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j); \quad S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j).$$

### 2.2.11. Уравнения кинематики манипулятора

Однородная матрица  ${}^0T_i$ , определяющая положение  $i$ -й системы координат относительно базовой системы координат, пред-

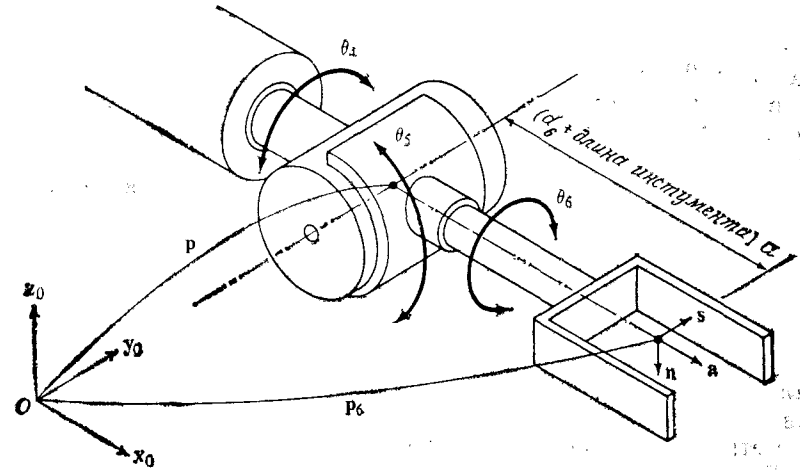


Рис. 2.13. Система координат схвата.

ставляет собой произведение последовательности однородных матриц преобразования  ${}^{i-1}A_i$  и имеет вид

$${}^0T_i = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i = \prod_{j=1}^i {}^{j-1}A_j = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_i & {}^0p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2-34)$$

где  $[x_i, y_i, z_i]$  — матрица, определяющая ориентацию  $i$ -й системы координат, связанной с  $i$ -м звеном, по отношению к базовой си-

стеме координат. Это верхняя левая подматрица матрицы  ${}^0T_i$ , имеющая размерность  $3 \times 3$ .  $p_i$  — вектор, соединяющий начало базовой системы координат с началом  $i$ -й системы координат. Это верхняя правая подматрица матрицы  ${}^0T_i$ , имеющая размерность  $3 \times 1$ . В частности, при  $i=6$  мы получаем матрицу  $T = {}^0A_6$ , которая задает положение и ориентацию схвата манипулятора относительно базовой системы координат. Эта матрица так часто используется при описании кинематики манипулятора, что ее называют «матрицей манипулятора». Предположим, что матрица  $T$  имеет следующий вид:

$$T = \begin{bmatrix} x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0R_6 & {}^0p_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-35)$$

где (рис. 2.13)

$n$  — вектор нормали к схвату. В случае плоскопараллельного движения пальцев схвата этот вектор перпендикулярен пальцам манипулятора.

$s$  — касательный вектор схвата. Он лежит в плоскости движения пальцев схвата и указывает направление движения пальцев во время открытия и закрытия схвата.

$a$  — вектор подхода схвата. Он направлен по нормали к ладони схвата (т. е. перпендикулярен плоскости крепления инструмента в схвате).

$p$  — вектор положения схвата. Этот вектор направлен из начала базовой системы координат к началу системы координат схвата, которое, как правило, расположено в точке, являющейся геометрическим центром полностью сжатых пальцев.

Если положение манипулятора в абсолютном пространстве определяется матрицей  $B$ , а в схвате манипулятора зафиксирован инструмент, положение которого в системе координат схвата определяется матрицей  $H$ , то положение рабочего узла инструмента относительно абсолютной системы координат дается произведением матриц  $B$ ,  ${}^0T_6$  и  $H$ , т. е.

$${}^{abc}T_{\text{инстр}} = B {}^0T_6 H. \quad (2.2-36)$$

Отметим, что  $H \equiv {}^6A_{\text{инстр}}$ ,  $B \equiv {}^{abc}A_0$ .

Решение прямой задачи кинематики для шестизвенного манипулятора является, таким образом, вопросом вычисления  $T = {}^0A_6$  с помощью последовательного перемножения шести матриц  ${}^{i-1}A_i$ . Отметим, что решение прямой задачи кинематики при-

водит к единственной матрице  $T$  при заданных  $q = (q_1, q_2, \dots, q_6)^T$  и фиксированных системах координат, где  $q_i = \theta_i$  для вращательного сочленения и  $q_i = d_i$  для поступательного сочленения. Ограничения определяются только физическими пределами изменения  $\theta_i$  для каждого сочленения манипулятора. В таблице на рис. 2.11 указаны такие пределы для робота Пума серии 560 при выборе систем координат, указанном на рис. 2.11.

Следующей после определения матриц преобразования координат задачей является поиск эффективного метода вычисления матрицы  $T$  при помощи универсальной вычислительной машины. Наиболее эффективным является способ, состоящий в аналитическом перемножении всех шести матриц с последующим вычислением элементов матрицы  $T$  на ЭВМ по полученным формулам. Недостатками этого метода являются, во-первых, трудоемкость вычисления произведения шести матриц  ${}^{i-1}A_i$  и, во-вторых, недостаточная гибкость метода, обусловленная тем, что каждая матрица манипулятора соответствует определенному типу робота при вполне конкретном выборе систем координат. С другой стороны, можно ввести в ЭВМ все шесть матриц  ${}^{i-1}A_i$  и с ее помощью выполнить их перемножение. Этот метод обладает большей гибкостью, но требует большего времени вычислений, и это при условии, что четвертая строка матриц  ${}^{i-1}A_i$  состоит в основном из нулей.

Метод, одновременно обладающий достаточной гибкостью и обеспечивающий приемлемую скорость вычислений, состоит в том, чтобы «вручную» перемножить первые и последние три матрицы  ${}^{i-1}A_i$ , получив  $T_1 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3$  и  $T_2 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6$ , что представляет собой достаточно простую задачу. Затем точные выражения для элементов матриц  $T_1$ ,  $T_2$  используются в программе, по которой ЭВМ производит численное перемножение этих матриц, формируя матрицу манипулятора  $T = T_1 T_2$ .

Для робота Пума 560 матрицы  $T_1$  и  $T_2$  имеют вид

$$T_1 = {}^0A_3 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -S_1 & C_1 S_{23} & a_2 C_1 C_2 + a_3 C_1 C_{23} - d_2 S_1 \\ S_1 C_{23} & C_1 & S_1 S_{23} & a_2 S_1 C_2 + a_3 S_1 C_{23} + d_2 C_1 \\ -S_{23} & 0 & C_{23} & -a_2 S_2 - a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-37)$$

$$T_2 = {}^3A_6 = {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & d_6 C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & d_6 S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_6 C_5 + d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-38)$$

где  $C_{ij} \equiv \cos(\theta_i + \theta_j)$  и  $S_{ij} \equiv \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

Матрица манипулятора  $T$  для робота Пума (рис. 2.11) равна

$$T = T_1 T_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-39)$$

где

$$n_x = C_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] - S_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6),$$

$$n_y = S_1 [C_{23} (C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_{23} S_5 C_6] + C_1 (S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6), \quad (2.2-40)$$

$$n_z = -S_{23} [C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6] - C_{23} S_5 S_6,$$

$$s_x = C_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] - S_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6),$$

$$s_y = S_1 [-C_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_{23} S_5 S_6] + C_1 (-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6),$$

$$s_z = S_{23} (C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_{23} S_5 S_6, \quad (2.2-41)$$

$$a_x = C_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) - S_1 S_4 S_5,$$

$$a_y = S_1 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + C_1 S_4 S_5, \quad (2.2-42)$$

$$a_z = -S_{23} C_4 S_5 + C_{23} C_5,$$

$$p_x = C_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_3 C_{23} + a_2 C_2] - S_1 (d_6 S_4 S_5 + d_2),$$

$$p_y = S_1 [d_6 (C_{23} C_4 S_5 + S_{23} C_5) + S_{23} d_4 + a_3 C_{23} + a_2 C_2] + C_1 (d_6 S_4 S_5 + d_2),$$

$$p_z = d_6 (C_{23} C_5 - S_{23} C_4 S_5) + C_{23} d_4 - a_3 S_{23} - a_2 S_2. \quad (2.2-43)$$

Положив для проверки  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$ ,  $\theta_3 = 90^\circ$ ,  $\theta_4 = 0^\circ$ ,  $\theta_5 = 0^\circ$ ,  $\theta_6 = 0^\circ$ , имеем

$$T \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -149,09 \\ 0 & 0 & 1 & 921,12 \\ -1 & 0 & 0 & 20,32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

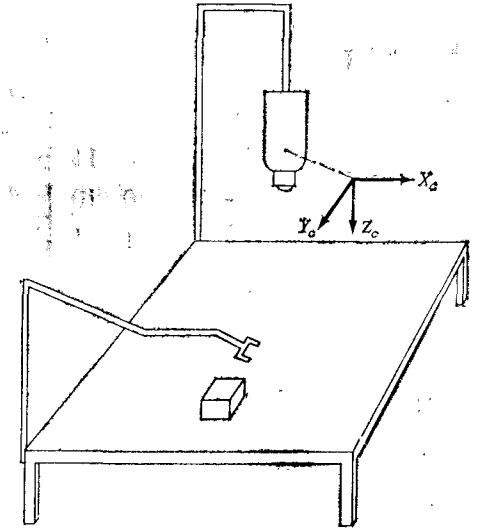
что согласуется с выбором систем координат, показанным на рис. 2.11.

Из равенств (2.2-40)–(2.2-43) видно, что вычисление матрицы манипулятора  $T$  требует обращения к программам вычисления 12 трансцендентных функций, выполнения 40 умножений и 20 сложений в том случае, если производится только вычисление верхней правой подматрицы матрицы  $T$ , имеющей размерность  $3 \times 3$ , а вектор  $\mathbf{n}$  определяется как векторное произведение векторов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{a}$  ( $\mathbf{n} = \mathbf{s} \times \mathbf{a}$ ). Далее, если объединить  $d_6$  с длиной рабочего инструмента, то  $d_6 = 0$ , а длина инструмента увеличится на  $d_6$  единиц. Это сокращает объем вычислений до 12 обращений к программам вычисления трансцендентных функций, 35 операций умножения и 16 операций сложения.

**Пример.** Робототехнический комплекс оборудован телевизионной камерой (рис. 2.14). В поле зрения камеры находятся точка начала базовой системы координат, в которой закреплен шести-звенный манипулятор, а также центр объекта манипулирования, например куба. Если в центре куба поместить локальную систему координат, то его положение относительно камеры будет определяться однородной матрицей преобразования  $T_1$ . Положение базовой системы координат относительно камеры также может быть задано однородной матрицей преобразования  $T_2$ , причем

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



- а) Найдите положение центра куба относительно базовой системы координат.

- б) Предположим, что куб находится в пределах досягаемости манипулятора. Какой должна быть матрица  $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$ , чтобы направление движения пальцев схвата совпадало с направлением оси  $y$  объекта манипулирования и при этом можно было бы поднять куб с поверхности, на которой он находится.

*Решение.*

$$\text{камера } T_{\text{куб}} \equiv T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\text{камера } T_{\text{база}} \equiv T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рис. 2.14. Робототехнический комплекс, оборудованный телевизионной камерой.

Чтобы найти база  $T_{куб}$ , воспользуемся «правилом последовательных преобразований»:

$$\text{база } T_{куб} = \text{база } T_{камера} \text{ камера } T_{куб} = (T_2)^{-1} T_1.$$

Используя для обращения матрицы  $T_2$  равенство (2.2-27), получаем результирующую матрицу преобразования

$$\text{база } T_{куб} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, куб находится в точке  $(11, 10, 1)^T$  относительно базовой системы координат. Его оси  $x, y, z$  сонаправлены соответственно с осями  $-y, x$  и  $z$  базовой системы координат.

Чтобы определить  $[n, s, a]$ , воспользуемся выражением

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $p = (11, 10, 1)^T$ , как следует из решения первой части задачи. В соответствии с условием задачи и видом матрицы база  $T_{куб}$  надо, чтобы вектор подхода  $a$  был направлен в сторону противоположную направлению оси  $OZ$  базовой системы координат, т. е.  $a = (0, 0, -1)^T$ ; вектор  $s$  должен быть параллелен оси  $y$  базовой системы, т. е.  $s = (\pm 1, 0, 0)^T$ ; вектор  $n$  можно сформировать как векторное произведение векторов  $s$  и  $a$ :

$$n = \begin{bmatrix} i & j & k \\ s_x & s_y & s_z \\ a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для матрицы ориентации схвата  $[n, s, a]$  можно записать два выражения:

$$[n, s, a] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad [n, s, a] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

## 2.2.12. Другие способы определения положения схвата

В предыдущих разделах мы рассмотрели поступательное и вращательное движения звеньев манипулятора и ввели понятие однородных матриц преобразования, описывающих положение и ориентацию систем координат звеньев. Наибольший интерес представляет матрица манипулятора  ${}^0T_6$ , которая описывает положение и ориентацию схвата относительно базовой системы координат. Верхняя левая подматрица матрицы  ${}^0T_6$ , имеющая размерность  $3 \times 3$ , задает ориентацию схвата. Эта подматрица поворота совпадает с матрицей  ${}^0R_6$ . Существуют и другие способы описания положения схвата.

**Описание ориентации с помощью углов Эйлера.** Как говорилось в разд. 2.2.4, описание вращения твердого тела с помощью матриц поворота упрощает многие операции, однако не дает полной системы обобщенных координат. Такой полной системой обобщенных координат являются углы Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$ .

С помощью матрицы поворота, записанной как в равенстве (2.2-17) через углы Эйлера, матрицу манипулятора  ${}^0T_6$  можно представить в следующем виде:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} C\varphi C\psi - S\varphi S\theta S\psi & -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi & S\varphi S\theta & p_x \\ S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi & -C\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi & -C\varphi S\theta & p_y \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-44)$$

Преимущество описания ориентации с использованием углов Эйлера состоит в том, что вся информация о положении и ориентации объекта в пространстве содержится в шестимерном векторе  $XYZ\varphi\theta\psi$ . Зная этот вектор и используя равенство (2.2-44), легко сформировать матрицу  ${}^0T_6$ .

**Описание ориентации с помощью углов крена, тангажа и рысканья.** Еще одной системой углов Эйлера для описания вращения являются углы крена, тангажа и рысканья (КТР). С использованием равенства (2.2-19), описывающего вращение тела в координатах КТР, получаем матрицу манипулятора  ${}^0T_6$  в виде

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} C\varphi C\theta & C\varphi S\theta S\omega - S\varphi C\psi & C\varphi S\theta C\psi + S\varphi S\psi & p_x \\ S\varphi C\theta & S\varphi S\theta S\psi + C\varphi C\psi & S\varphi S\theta C\psi - C\varphi S\psi & p_y \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-45)$$

Как уже говорилось в гл. 1, существуют различные типы манипуляторов (в зависимости от используемых типов сочленений,



например XYZ — манипулятор, цилиндрический, сферический, манипулятор смешанного типа). В связи с этим положение  $(p_x, p_y, p_z)^T$  схвата манипулятора может быть описано, например, в сферических или цилиндрических координатах. Результирующую матрицу манипулятора можно получить из следующего равенства:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-46)$$

где  ${}^0R_6$  — матрица поворота, выраженная через углы Эйлера или через векторы  $[n, s, a]$ .

**Подматрица положения в цилиндрических координатах.** В цилиндрической системе координат положение схвата определяется следующими преобразованиями поворота и сдвига (рис. 2.15):

1. Сдвиг на  $r$  единиц вдоль оси  $OX$  ( $T_{x,r}$ ).
2. Поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OZ$  ( $T_{z,\alpha}$ ).
3. Сдвиг на  $d$  единиц вдоль оси  $OZ$  ( $T_{z,d}$ ).

Однородную матрицу, определяющую результат перечисленных преобразований, можно представить в следующем виде:

$$T_{\text{цил}} = T_{z,d} T_{z,\alpha} T_{x,r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & rC\alpha \\ S\alpha & C\alpha & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-47)$$

Поскольку нас интересует только вектор положения (т. е. четвертый столбец матрицы  $T_{\text{цил}}$ ), матрицу манипулятора  ${}^0T_6$  можно представить в виде

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-48)$$

причем  $p_x \equiv rC\alpha$ ,  $p_y \equiv rS\alpha$ ,  $p_z \equiv d$ .

**Подматрица положения в сферических координатах.** Для определения положения схвата можно также воспользоваться сферической системой координат. В этом случае положение схвата определяется следующими преобразованиями (рис. 2.16):

1. Сдвиг на  $r$  единиц вдоль оси  $OZ$  ( $T_{z,r}$ ).
2. Поворот на угол  $\beta$  вокруг оси  $OY$  ( $T_{y,\beta}$ ).
3. Поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OZ$  ( $T_{z,\alpha}$ ).

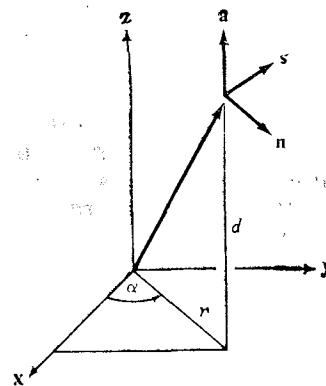


Рис. 2.15. Представление в цилиндрических координатах.

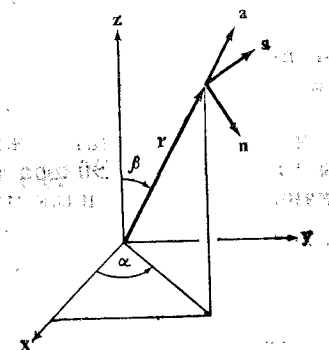


Рис. 2.16. Представление в сферических координатах.

Матрица, описывающая результат перечисленных преобразований, равна

$$T_{\text{сф}} = T_{z,\alpha} T_{y,\beta} T_{z,r} = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & -S\alpha C\alpha C\beta & C\alpha S\beta & rC\alpha S\beta \\ S\alpha C\beta & C\alpha C\alpha C\beta & S\alpha S\beta & rS\alpha S\beta \\ -S\beta & 0 & C\beta & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2-49)$$

Как и выше, нас интересует вектор положения схвата относительно базовой системы координат, поэтому матрица манипулятора  ${}^0T_6$ , в которой вектор положения представлен в сферических координатах, а подматрица поворота записана через углы

Эйлера или векторы  $[n, s, a]$ , дается следующим выражением:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rC\alpha S\beta \\ 0 & 1 & 0 & rS\alpha S\beta \\ 0 & 0 & 1 & rC\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0R_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2-50)$$

где  $p_x \equiv rC\alpha S\beta$ ,  $p_y \equiv rS\alpha S\beta$ ,  $p_z \equiv rC\beta$ .

В заключение отметим, что положение и ориентация схвата манипулятора могут быть описаны несколькими способами (в различных системах координат). Вектор положения может быть представлен в декартовой  $(p_x, p_y, p_z)^T$ , цилиндрической  $(rC\alpha, rS\alpha, d)^T$  или сферической  $(rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta)^T$  системе координат. Для описания ориентации схвата относительно базовой системы координат можно использовать декартовы координаты  $[n, s, a]$ , углы Эйлера  $(\varphi, \theta, \psi)$  или углы крена, тангажа и рысканья. Сказанное иллюстрирует табл. 2.2.

Таблица 2.2. Различные способы описания положения и ориентации

Положение	Ориентация
В декартовых координатах $(p_x, p_y, p_z)^T$	В декартовых координатах $[n, s, a]$
В цилиндрических координатах $(rC\alpha, rS\alpha, d)^T$	Углы Эйлера $(\varphi, \theta, \psi)$
В сферических координатах $(rC\alpha S\beta, rS\alpha S\beta, rC\beta)^T$	Крен, тангаж, рысканье

$$T_{\text{положения}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{\text{поворота}} = \begin{bmatrix} [n, s, a] \text{ или } R_{\varphi, \theta, \psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^0T_6 = T_{\text{положения}} T_{\text{поворота}}$

### 2.2.13. Классификация манипуляторов

Манипулятор состоит из последовательности твердых тел (или звеньев), первое из которых соединено с опорной стойкой, а последнее снабжено рабочим инструментом. Каждое звено соединено не более чем с двумя другими так, чтобы не образовывалось замкнутых цепей. Считается, что соединение двух звеньев — сочленение — имеет только одну степень свободы. С учетом этого ограничения интерес представляют два типа сочленений: вращательное и поступательное. Вращательное сочленение допускает только вращение вокруг некоторой оси; поступа-

тельное сочленение обеспечивает поступательное движение вдоль некоторой оси при отсутствии вращения (поступательное движение с вращением имеет место в винтовых сочленениях). Звенья манипулятора участвуют в относительном движении, в результате которого достигается определенное положение и ориентация схвата или инструмента.

Следовательно, рассматривая манипуляторы как некоторые последовательности сочленений и звеньев, их можно классифицировать по типу используемых сочленений и последовательности их расположения в направлении от опорной стойки к схвату. При таком подходе манипулятор Пума следует отнести к классу 6В, а манипулятор Станфордского университета — к классу 2В-П-3В. Здесь В обозначает вращательное, а П — поступательное сочленение.

### 2.3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

В этом разделе рассматривается обратная задача кинематики шестизвенного манипулятора. Команды управления манипуляторами роботов, оснащенных ЭВМ, формируются обычно в пространстве присоединенных переменных, координаты объектов манипулирования задаются в некоторой абсолютной системе координат. Для управления положением и ориентацией схвата робота таким образом, чтобы производить необходимые операции с объектом манипулирования, необходимо уметь решать обратную задачу кинематики. Другими словами, надо уметь по заданной матрице  ${}^0T_6$  положения и ориентации схвата шестизвенного манипулятора и известным параметрам его звеньев и сочленений определить присоединенные параметры  $q = (q_1, \dots, q_6)^T$  манипулятора, обеспечивающие заданное положение схвата.

Существуют различные методы решения обратной задачи кинематики, к числу которых относятся методы обратных преобразований [231], винтовой алгебры [149], двойственных матриц [56], двойственных кватернионов [319], итераций [294] и геометрический подход [168]. Пайпер [235] получил решение обратной задачи кинематики для произвольного манипулятора с шестью степенями свободы, первые три сочленения которого вращательные или поступательные, а оси последних трех пересекаются в одной точке. Решение получено в форме уравнения 4-й степени относительно одной из неизвестных и в явном виде относительно остальных. Пол и др. [231] для того же класса манипуляторов, что и Пайпер, предложили воспользоваться методом обратных преобразований с применением однородных матриц размерностью  $4 \times 4$ . Недостатком этого подхода является то, что из него не следует, каким образом выбрать из нескольких существующих решений одно, соответствующее данной

конфигурации манипулятора. В этом вопросе исследователю приходится полагаться на собственную интуицию. Ниже рассмотрен предложенный Пайпером подход к решению обратной задачи кинематики в эйлеровых координатах. Уикер и др. [294] и Миленковиц и Хуанг [198] предложили итеративную процедуру решения обратной задачи кинематики большинства промышленных роботов. Такой подход требует больших вычислительных затрат и не гарантирует сходимости результатов, особенно для вырожденного случая. Кроме того, как и метод обратных преобразований, метод итераций не дает способа выбора из нескольких существующих решений одного, соответствующего данной конфигурации манипулятора.

Желательно, чтобы решение обратной задачи кинематики было получено в явном виде. К счастью, большинство промышленных роботов удовлетворяет одному из следующих двух условий, достаточных для достижения такой цели:

1. Оси трех смежных сочленений пересекаются в одной точке.
  2. Оси трех смежных сочленений параллельны между собой.
- Станфордский манипулятор и манипулятор Пума удовлетворяют первому условию, а манипуляторы *ASEA* и *MINIMOVER* — второму.

Из равенства (2.2-39) следует вид матрицы манипулятора  $T$ :

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6. \quad (2.3-1)$$

Из равенства (2.3-1) видно, что матрица  $T$  является функцией синусов и косинусов углов  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ . Приравнивая элементы матриц в левой и правой частях матричного уравнения (2.3-1), получаем, например, для манипулятора Пума двенадцать уравнений (2.2-40) — (2.2-43) относительно шести неизвестных (присоединенных углов). Поскольку число уравнений превышает число переменных, можно сразу сделать вывод о том, что решение обратной задачи кинематики для манипулятора Пума не единственно. Мы рассмотрим два метода решения обратной задачи кинематики: метод обратных преобразований в эйлеровых координатах, которым можно также воспользоваться для решения этой задачи в координатах присоединенных углов, и геометрический подход, выгодно отличающийся наглядностью.

### 2.3.1. Метод обратных преобразований

В этом разделе общий метод обратных преобразований продемонстрирован на примере решения обратной задачи кинематики в эйлеровых координатах. Задача состоит в том, чтобы,

зная трехмерную матрицу поворота и учитывая равенство (2.2-17), представляющее собой выражение этой матрицы через углы Эйлера:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_z R_\varphi R_\theta R_\psi = \begin{bmatrix} C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi & -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi & S\varphi S\theta \\ S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi & -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi & -C\varphi S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}. \quad (2.3-2)$$

определить соответствующие значения углов  $\varphi, \theta, \psi$ . Записывая это матричное уравнение в форме уравнений для отдельных элементов, получим

$$n_x = C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi, \quad (2.3-3a)$$

$$n_y = S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi, \quad (2.3-3б)$$

$$n_z = S\theta S\psi, \quad (2.3-3в)$$

$$s_x = -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi, \quad (2.3-3г)$$

$$s_y = -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi, \quad (2.3-3д)$$

$$s_z = S\theta C\psi, \quad (2.3-3е)$$

$$a_x = S\varphi S\theta, \quad (2.3-3ж)$$

$$a_y = -C\varphi S\theta, \quad (2.3-3з)$$

$$a_z = C\theta. \quad (2.3-3и)$$

Из уравнений (2.3-3и), (2.3-3е) и (2.3-3з) получаем, что решение всей системы уравнений (2.3-3а) — (2.3-3и) имеет следующий вид:

$$\theta = \arccos(a_z), \quad (2.3-4)$$

$$\varphi = \arccos\left[\frac{s_z}{S\theta}\right], \quad (2.3-5)$$

$$\psi = \arccos\left[\frac{-a_y}{S\theta}\right]. \quad (2.3-6)$$

Полученное решение неустойчиво и плохо обусловлено по следующим причинам:

1. Функция  $\arccos$  неудобна тем, что точность вычисления ее значения зависит от этого значения.

2. В точках, где  $\sin(\theta)$  принимает близкие к нулю значения, т. е. при  $\theta \approx 0^\circ$  или  $\theta \approx 180^\circ$ , равенства (2.3-5) и (2.3-6) либо не определены, либо дают низкую точность вычислений.

Следовательно, требуется найти более устойчивый способ определения углов Эйлера в данной задаче, а также более

устойчивую обратную тригонометрическую функцию для вычисления этих углов. Для вычисления угла  $\theta$ , значения которого лежат в пределах  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ , воспользуемся функцией арктангенса  $ATAN2(y, x)$ , вычисляющей значение  $\text{arctg}(y/x)$  с учетом принадлежности аргумента соответствующему квадранту. Эта функция определена следующим образом:

$$\theta = ATAN2(y, x) \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ, & \text{если } x > 0, y > 0; \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, & \text{если } x < 0, y > 0; \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ, & \text{если } x < 0, y < 0; \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ, & \text{если } x > 0, y < 0. \end{cases} \quad (2.3-7)$$

Применяя такую обратную тригонометрическую функцию двух аргументов, рассмотрим общее решение, предложенное Полом и др. [231].

Элементы матрицы в левой части матричного уравнения (2.3-2) заданы, а элементы матриц, стоящих в правой части этого уравнения, неизвестны и зависят от  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ . В работе [231] предлагается последовательно умножить слева обе части уравнения (2.3-2) на матрицы обратных преобразований и определять искомые углы из полученных таким образом матричных уравнений. Смысл таких преобразований состоит в том, что мы переносим сначала одну из неизвестных величин из правой в левую часть уравнения, находим ее, затем переносим в левую часть следующую неизвестную, найдя ее, повторяем эту процедуру до тех пор, пока не будут найдены все неизвестные.

Умножая слева матричное уравнение (2.3-2) на  $\mathbf{R}_{z, \varphi}^{-1}$ , переносим неизвестную  $\varphi$  в левую часть, оставляя в правой неизвестные  $\theta$  и  $\psi$ , и тем самым получаем

$$\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} C\varphi n_x + S\varphi n_y & C\varphi s_x + S\varphi s_y & C\varphi a_x + S\varphi a_y \\ -S\varphi n_x + C\varphi n_y & -S\varphi s_x + C\varphi s_y & -S\varphi a_x + C\varphi a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}. \quad (2.3-8)$$

Из равенства элементов (1, 3) (элементов, находящихся на пересечении 1-й строки и 3-го столбца матрицы) в правой и левой частях уравнения (2.3-8) имеем

$$C\varphi a_x + S\varphi a_y = 0, \quad (2.3-9)$$

что в свою очередь дает

$$\varphi = \text{arctg} \left[ \frac{a_x}{-a_y} \right] = ATAN2(a_x, -a_y). \quad (2.3-10)$$

Из равенства элементов (1, 1), (1, 2) в правой и левой частях следует

$$C\psi = C\varphi n_x + S\varphi n_y, \quad (2.3-11a)$$

$$S\psi = -C\varphi s_x - S\varphi s_y, \quad (2.3-11b)$$

что позволяет найти  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \text{arctg} \left[ \frac{S\psi}{C\psi} \right] = \text{arctg} \left[ \frac{-C\varphi s_x - S\varphi s_y}{C\varphi n_x + S\varphi n_y} \right] = \\ &= ATAN2(-C\varphi s_x - S\varphi s_y, C\varphi n_x + S\varphi n_y). \end{aligned} \quad (2.3-12)$$

Приравнивая элементы (2, 3), (3, 3) матриц в левой и правой частях уравнения, получаем

$$\begin{aligned} S\theta &= S\varphi a_x - C\varphi a_y, \\ C\theta &= a_z, \end{aligned} \quad (2.3-13)$$

что позволяет найти  $\theta$

$$\begin{aligned} \theta &= \text{arctg} \left[ \frac{S\theta}{C\theta} \right] = \text{arctg} \left[ \frac{S\varphi a_x - C\varphi a_y}{a_z} \right] = \\ &= ATAN2(S\varphi a_x - C\varphi a_y, a_z). \end{aligned} \quad (2.3-14)$$

Поскольку смысл метода обратных преобразований состоит в переносе одной из неизвестных величин в левую часть матричного уравнения с последующим разрешением уравнения относительно этой неизвестной, можно попытаться решить это же самое матричное уравнение, умножая обе его части справа на матрицу обратного преобразования  $\mathbf{R}_{\psi, \theta}^{-1}$ :

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & S\psi & 0 \\ -S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}.$$

В результате умножения матриц получим

$$\begin{bmatrix} n_x C\psi - s_x S\psi & n_x S\psi + s_x C\psi & a_x \\ n_y C\psi - s_y S\psi & n_y S\psi + s_y C\psi & a_y \\ n_z C\psi + s_z S\psi & n_z S\psi + s_z C\psi & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi C\theta & S\varphi S\theta \\ S\varphi & C\varphi C\theta & -C\varphi S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix}. \quad (2.3-15)$$

Как и выше, приравнивая элементы (3, 1) матриц в левой и правой частях уравнения, имеем

$$n_z C\psi - s_z S\psi = 0, \quad (2.3-16)$$

что дает

$$\psi = \arctg \left[ \frac{n_z}{s_z} \right] = ATAN2(n_z, s_z). \quad (2.3-17)$$

Из равенства элементов (3, 2), (3, 3) обеих матриц следует

$$S\theta = n_z S\psi + s_z C\psi, \quad (2.3-18a)$$

$$C\theta = a_z \quad (2.3-18b)$$

что позволяет определить  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \theta &= \arctg \left[ \frac{n_z S\psi + s_z C\psi}{a_z} \right] = \\ &= ATAN2(n_z S\psi + s_z C\psi, a_z). \end{aligned} \quad (2.3-19)$$

Из равенства элементов (1, 1), (2, 1) матриц в левой и правой частях уравнения (2.3-15) имеем

$$C\varphi = n_x C\psi - s_x S\psi, \quad (2.3-20a)$$

$$S\varphi = n_y C\psi - s_y S\psi, \quad (2.3-20b)$$

откуда легко найти

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg \left[ \frac{n_y C\psi - s_y S\psi}{n_x C\psi - s_x S\psi} \right] = \\ &= ATAN2(n_y C\psi - s_y S\psi, n_x C\psi - s_x S\psi). \end{aligned} \quad (2.3-21)$$

Решение вопроса о том, слева или справа умножать обе части матричного уравнения на матрицу обратного преобразования, зависит от исследователя и во многом определяется его интуицией.

Воспользуемся изложенным методом обратных преобразований для определения углов Эйлера манипулятора Пума. В применении к манипуляторам типа Пума углы Эйлера обозначаются символами  $O$ ,  $A$  и  $T$  и определяются следующим образом (рис. 2.17):

$O$  (ориентация) — угол, образуемый осью  $y_0$  с проекцией оси инструмента на плоскость  $X_0Y_0$  и отсчитываемый вокруг оси  $Z_0$ .

$A$  (высота<sup>1)</sup>) — угол, образуемый плоскостью  $X_0Y_0$  с осью инструмента  $a$ , отсчитываемый вокруг оси инструмента  $s$ .

$T$  (инструмент) — угол, образуемый плоскостью  $X_0Y_0$  с осью инструмента  $s$ , отсчитываемый вокруг оси инструмента  $a$ .

<sup>1)</sup> По первой букве английского слова altitude — высота. — Прим. перев.

Вначале оси системы координат инструмента (или системы координат схвата) параллельны осям базовой системы координат робота, как показано на рис. 2.18, т. е., когда  $O=A=T=0^\circ$ , схват направлен в сторону, противоположную направлению оси

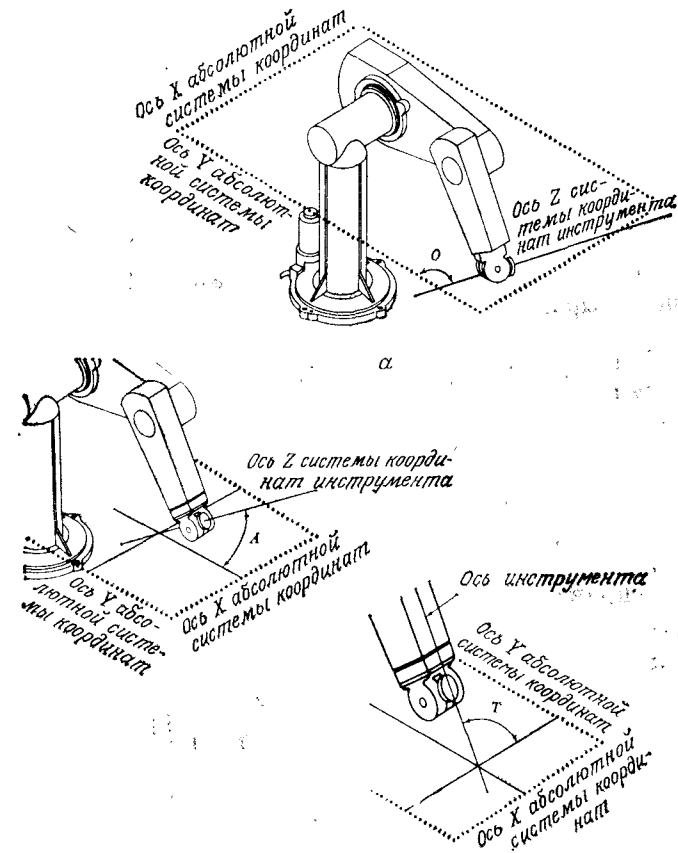


Рис. 2.17. Определение углов Эйлера  $O$ ,  $A$  и  $T$  (из руководства 398Н к манипулятору Пума).

$y_0$ , пальцы расположены в горизонтальной плоскости, а ось  $s$  сонаправлена с осью  $x_0$ . Матрица преобразования, задающая ориентацию системы координат схвата ( $n, s, a$ ) по отношению к базовой системе координат ( $x_0, y_0, z_0$ ), имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3-22)$$

С учетом определения углов  $OAT$  и вида матрицы (2.3-22), задающей начальную ориентацию системы координат схвата, связь

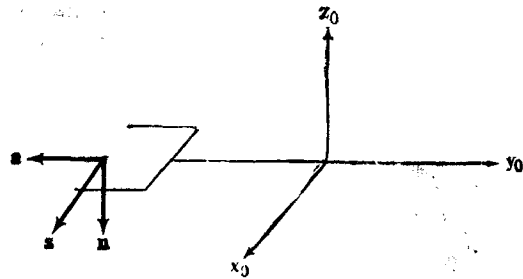


Рис. 2.18. Начальное расположение системы координат инструмента.

между матрицей ориентации схвата и углами  $OAT$  определяется следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{z,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}_{s,A} \mathbf{R}_{a,T} = \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & -ST & 0 \\ ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая справа это матричное уравнение на матрицу, обратную  $\mathbf{R}_{a,T}$ ,

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CT & ST & 0 \\ -ST & CT & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CO & -SO & 0 \\ SO & CO & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} CA & 0 & SA \\ 0 & 1 & 0 \\ -SA & 0 & CA \end{bmatrix}$$

и произведя умножение матриц, получаем

$$\begin{bmatrix} n_x CT - s_x ST & n_x ST + s_x CT & a_x \\ n_y CT - s_y ST & n_y ST + s_y CT & a_y \\ n_z CT - s_z ST & n_z ST + s_z CT & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -SOSA & CO & SOCA \\ COSA & SO & -COCA \\ -CA & 0 & -SA \end{bmatrix}. \quad (2.3-23)$$

Приравняв элементы (3, 2) в обеих частях матричного уравнения (2.3-23), получим

$$n_z ST + s_z CT = 0, \quad (2.3-24)$$

что позволяет определить  $T$ :

$$T = \arctg \left[ \frac{s_z}{-n_z} \right] = ATAN2(s_z, -n_z). \quad (2.3-25)$$

Из равенства элементов (3, 1), (3, 3) в левой и правой частях уравнения (2.3-23) следует

$$SA = -a_z, \quad (2.3-26a)$$

$$CA = -n_z CT + s_z ST. \quad (2.3-26b)$$

В результате получаем

$$A = \arctg \left[ \frac{-a_z}{-n_z CT + s_z ST} \right] = ATAN2(-a_z, -n_z CT + s_z ST). \quad (2.3-27)$$

Из равенства элементов (1, 2), (2, 2) матриц в левой и правой частях уравнения (2.3-23) имеем

$$CO = n_x ST + s_x CT, \quad (2.3-28a)$$

$$SO = n_y ST + s_y CT, \quad (2.3-28b)$$

откуда получаем выражение для  $O$ :

$$O = \arctg \left[ \frac{n_y ST + s_y CT}{n_x ST + s_x CT} \right] = ATAN2(n_y ST + s_y CT, n_x ST + s_x CT). \quad (2.3-29)$$

Рассмотренным способом, состоящим в умножении исходного уравнения слева или справа на неизвестную матрицу обратного преобразования, можно воспользоваться для решения обратной задачи кинематики манипулятора Пума. Такое решение подробно изложено в работе [231].

Хотя метод обратных преобразований дает общий подход к решению обратной задачи кинематики, из него не следует, каким образом выбрать из нескольких существующих решений одно, соответствующее требуемой конфигурации манипулятора. В этом вопросе приходится полагаться на интуицию исследователя. Для нахождения решения обратной задачи кинематики по заданной матрице манипулятора более пригодным является геометрический подход, дающий также и способ выбора единственного решения для конкретной конфигурации манипулятора. Этот подход описан в разд. 2.3.2.

### 2.3.2. Геометрический подход

В этом разделе излагается геометрический подход к решению обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора с вра-

щательными сочленениями. Решение проводится для манипулятора типа Пума. По аналогии с геометрией человеческой руки и в соответствии с расположением систем координат звеньев различные конфигурации манипулятора Пума (рис. 2.11) определяются с помощью трех индикаторов конфигурации (РУКА, ЛОКОТЬ, ЗАПЯСТЬЕ)<sup>1)</sup>. Для индикатора характеризуют взаимное расположение первых трех сочленений, а третий — расположение последних трех. Для шестиосных манипуляторов типа Пума существуют четыре различных решения обратной задачи кинематики первых трех сочленений и каждому из этих четырех решений соответствует по два допустимых решения для последних трех сочленений. Первые два индикатора конфигурации позволяют выбрать одно из четырех возможных решений для первых трех сочленений. Аналогично, третий индикатор определяет выбор одного из двух возможных решений для последних трех сочленений. Выбор индикаторов, определяющих конфигурацию манипулятора, производится пользователем до начала решения обратной задачи кинематики. Решение производится в два этапа. Сначала вычисляется вектор, направленный от плеча к запястью. Проекция этого вектора на плоскость  $x_{i-1} y_{i-1}$  используются при нахождении присоединенного угла  $i$ -го сочленения ( $i = 1, 2, 3$ ) для первых трех сочленений. При решении обратной задачи кинематики для последних трех сочленений используется решение, полученное для первых трех сочленений, подматрицы поворота матриц  ${}^0T$  и  ${}^{i-1}A_i$  ( $i = 4, 5, 6$ ) и проекции систем координат звеньев на плоскость  $x^{i-1} y^{i-1}$ . Исходя из геометрических соображений, удается последовательно сформировать решение данной задачи. В качестве проверки полученного решения можно с помощью соответствующих уравнений кинематики вычислить значения индикаторов конфигурации, являющихся функциями присоединенных углов. С некоторыми изменениями и уточнениями этот метод можно обобщить для решения обратной задачи кинематики большинства современных промышленных роботов с вращательными сочленениями.

Если задана матрица  ${}^{abc}T_{инстр}$ , то, умножив эту матрицу слева и справа на  $\mathbf{V}^{-1}$  и  $\mathbf{H}^{-1}$  соответственно, можно вычислить  ${}^0T_6$  и

затем воспользоваться указанным способом:

$${}^0T_6 = T = \mathbf{V}^{-1} {}^{abc}T_{инстр} \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3-30)$$

**Определение различных конфигураций манипулятора.** Для манипулятора Пума, показанного на рис. 2.11 (и других мани-

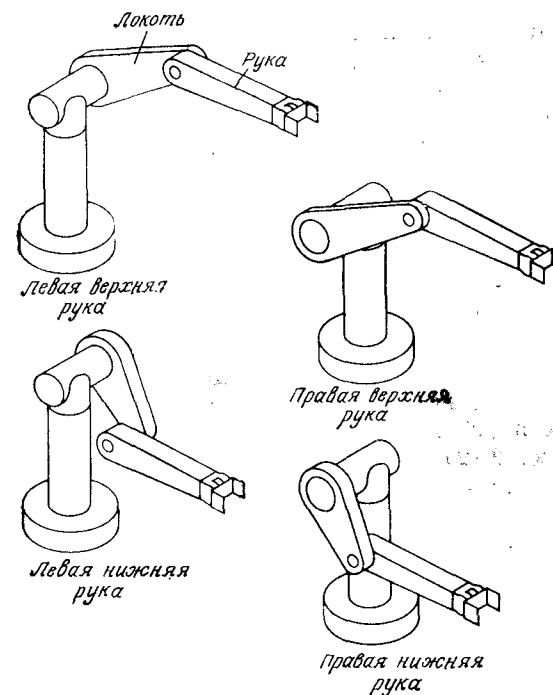


Рис. 2.19. Определение различных конфигураций манипулятора.

<sup>1)</sup> В этом разделе авторы для определения конфигурации манипулятора ставят в соответствие звеньям — руке, локтю, запястью — некоторые функции, названные ими индикаторами конфигурации. Придавая индикаторам конфигурации дискретные значения ( $\pm 1$ ) в зависимости от знака соответствующих кинематических соотношений, авторам удалось создать достаточно наглядную классификацию видов конфигурации манипулятора с помощью геометрической интерпретации. Желая сохранить стиль изложения, мы сохранили предложенную авторами терминологию, хотя она не получила широкого распространения в отечественной литературе по робототехнике. — *Прим. ред.*

пуляторов с вращательными сочленениями), возможны различные типы конфигурации, которые определяются по аналогии с геометрией руки человека в соответствии с расположением систем координат звеньев, устанавливаемым алгоритмом 2.1. Типы конфигурации манипулятора устанавливаются следующим образом (рис. 2.19):

**ПРАВАЯ РУКА:** При неподвижном 3-м сочленении увеличение угла  $\theta_2$  приводит к увеличению координаты запястья по оси  $Z_0$ .

**ЛЕВАЯ РУКА:** При неподвижном 3-м сочленении увеличение угла  $\theta_2$  приводит к уменьшению координаты запястья по оси  $z_0$ .

**ВЕРХНЯЯ (локоть выше запястья) РУКА:** Положение запястья {ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ} руки по отношению к системе координат плеча характеризуется {отрицательным/положительным} значением координаты по оси  $y_2$ .

**НИЖНЯЯ (локоть ниже запястья) РУКА:** Положение запястья {ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ} руки по отношению к системе координат плеча характеризуется {положительным/отрицательным} значением координаты по оси  $y_2$ .

**КИСТЬ ВНИЗ:** Скалярное произведение единичного вектора  $s$  системы координат схвата и единичного вектора  $y_5$  системы координат  $(x_5, y_5, z_5)$  положительно.

**КИСТЬ ВВЕРХ:** Скалярное произведение единичного вектора  $s$  системы координат схвата и единичного вектора  $y_5$  системы координат  $(x_5, y_5, z_5)$  отрицательно.

(Заметим, что это определение типов конфигурации манипулятора по положению систем координат звеньев изменится, если будут использованы другие системы координат.)

В соответствии с данным определением различных конфигураций манипулятора для каждой из таких конфигураций определены индикаторы конфигурации (РУКА и ЛОКОТЬ). Совместно эти два индикатора выделяют одно из четырех возможных решений обратной задачи кинематики для первых трех сочленений. Для каждой из четырех возможных конфигураций манипулятора (рис. 2.19), определяемых первыми двумя индикаторами, третий индикатор (ЗАПЯСТЬЕ) обуславливает выбор одного из двух возможных решений обратной задачи кинематики для последних трех сочленений. Перечисленные три индикатора конфигурации звеньев могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{РУКА} &= \begin{cases} +1 & \text{для ПРАВОЙ руки} \\ -1 & \text{для ЛЕВОЙ руки} \end{cases} \\ \text{ЛОКОТЬ} &= \begin{cases} +1 & \text{для ВЕРХНЕЙ руки} \\ -1 & \text{для НИЖНЕЙ руки} \end{cases} \\ \text{ЗАПЯСТЬЕ} &= \begin{cases} +1, & \text{если КИСТЬ ВНИЗ} \\ -1, & \text{если КИСТЬ ВВЕРХ} \end{cases} \end{aligned}$$

В дополнение к перечисленным индикаторам определим ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ следующим образом:

$$\text{ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ} = \begin{cases} +1 & \text{Сменить ориентацию запястья} \\ -1 & \text{Не менять ориентацию запястья} \end{cases} \quad (2.3-34)$$

Значения индикаторов и переключателя задаются исследователем до начала решения обратной задачи кинематики. Значения индикаторов можно также определить, зная присоединенные углы манипулятора и пользуясь соответствующими уравнениями конфигурации, которые будут приведены ниже и которыми можно воспользоваться для проверки решения обратной задачи кинематики.

**Решение обратной задачи кинематики для первых трех сочленений.** В соответствии с кинематической схемой манипулятора Пума, представленной на рис. 2.11, вектор  $p$ , выходящий из начала системы координат плеча  $(x_0, y_0, z_0)$  и заканчивающийся в точке пересечения осей трех последних сочленений, определяется следующим выражением (см. рис. 2.14):

$$p = p_6 - d_6 a = (p_x, p_y, p_z)^T, \quad (2.3-35)$$

что соответствует вектору положения матрицы  ${}^0T_4$ :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(a_2C_2 + a_3C_{23} + d_4S_{23}) - d_2S_1 \\ S_1(a_2C_2 + a_3C_{23} + d_4S_{23}) + d_2C_1 \\ d_4C_{23} - a_3S_{23} - a_2S_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3-36)$$

**Решение для первого сочленения.** Проецируя, как показано на рис. 2.20, вектор  $p$  на плоскость  $x_0, y_0$ , получаем следующие уравнения для определения угла  $\theta_1$ :

$$\theta_1^L = \varphi - \alpha, \quad \theta_1^R = \pi + \varphi + \alpha, \quad (2.3-37)$$

$$r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, \quad R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad (2.3-38)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_y}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{p_x}{R}, \quad (2.3-39)$$

$$\sin \alpha = \frac{d_2}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{r}{R}, \quad (2.3-40)$$

в которых верхние индексы  $L$  и  $R$  означают соответственно ЛЕВУЮ и ПРАВУЮ конфигурации манипулятора. Из уравнений (2.3-37) — (2.3-40) получаем значения функций синуса и косинуса угла  $\theta_1$  для ЛЕВОЙ/ПРАВОЙ конфигурации манипулятора:

$$\sin \theta_1^L = \sin(\varphi - \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha = \frac{p_y r - p_x d_2}{R^2}, \quad (2.3-41)$$

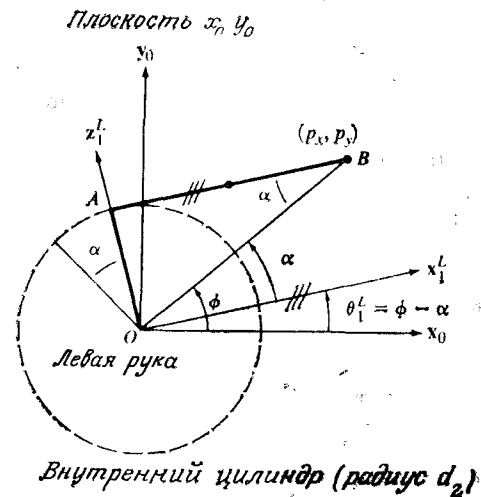
$$\cos \theta_1^L = \cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha = \frac{p_x r + p_y d_2}{R^2}, \quad (2.3-42)$$

$$\sin \theta_1^R = \sin(\pi + \varphi + \alpha) = \frac{-p_y r - p_x d_2}{R^2}, \quad (2.3-43)$$

$$\cos \theta_1^R = \cos(\pi + \varphi + \alpha) = \frac{-p_x r + p_y d_2}{R^2}. \quad (2.3-44)$$



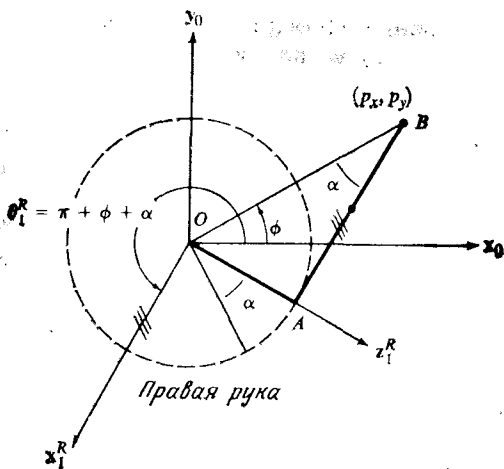
Объединяя равенства (2.3-41) — (2.3-44) и используя индикатор РУКА для учета ЛЕВОЙ/ПРАВОЙ конфигурации манипуля-



$$OA = d_2$$

$$AB = r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}$$

$$OB = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = R$$



$$OA = d_2$$

$$AB = r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}$$

$$OB = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Рис. 2.20. Решение для 1-го сочленения.

тора, получаем значения функций синуса и косинуса угла  $\theta_1$  в следующем виде:

$$\sin \theta_1 = \frac{-\text{РУКА } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{p_x^2 + p_y^2}, \quad (2.3-45)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{-\text{РУКА } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2}{p_x^2 + p_y^2}. \quad (2.3-46)$$

В этих равенствах используется положительное значение квадратного корня, а индикатор РУКА определен равенством (2.3-31). Для вычисления  $\theta_1$ , лежащего в пределах  $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$ , воспользуемся функцией арктангенса, определенной равенством

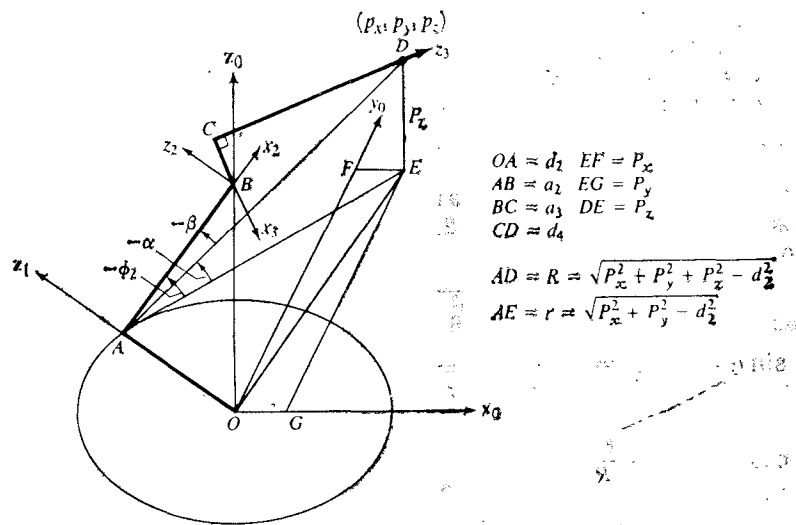


Рис. 2.21. Решение для 2-го сочленения.

(2.3-7). Из равенств (2.3-45) и (2.3-46) с учетом равенства (2.3-7) получаем следующую формулу для определения  $\theta_1$ :

$$\theta_1 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \right] =$$

$$= \arctg \left[ \frac{-\text{РУКА } p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} - p_x d_2}{-\text{РУКА } p_x \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2} + p_y d_2} \right] - \pi \leq \theta_1 \leq \pi. \quad (2.3-47)$$

**Решение для второго сочленения.** Чтобы найти  $\theta_2$ , спроецируем вектор  $\mathbf{r}$  на плоскость  $x_1, y_1$ , как показано на рис. 2.21. В соответствии с этим рисунком возможны четыре различных конфигурации манипулятора. Каждой конфигурации соответствует свое значение угла  $\theta_2$  при  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  и  $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  (табл. 2.3). Как следует из табл. 2.3, используя индикаторы конфигурации РУКА и ЛОКОТЬ, для  $\theta^2$  можно записать единое для всех возможных конфигураций манипулятора выражение, имеющее следующий вид.

$$\theta_2 = \alpha + (\text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ}) \cdot \beta = \alpha + K \cdot \beta, \quad (2.3-48)$$

где составной индикатор конфигурации  $K = \text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ}$  определяет соответствующий знак угла  $\beta$ , а точкой обозначена

Таблица 2.3. Угол  $\theta_2$  при различных конфигурациях манипулятора

Конфигурация манипулятора	$\theta_2$	РУКА	ЛОКОТЬ	РУКА·ЛОКОТЬ
ЛЕВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\alpha - \beta$	-1	+1	-1
ЛЕВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\alpha + \beta$	-1	-1	+1
ПРАВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\alpha + \beta$	+1	+1	+1
ПРАВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\alpha - \beta$	+1	-1	-1

операция умножения индикаторов. Геометрия манипулятора, отраженная в схеме на рис. 2.21, позволяет записать следующие соотношения:

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}, \quad r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}, \quad (2.3-49)$$

$$\sin \alpha = -\frac{p_z}{R} = -\frac{p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}, \quad (2.3-50)$$

$$\cos \alpha = -\frac{\text{РУКА} \cdot r}{R} = -\frac{\text{РУКА} \cdot \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}, \quad (2.3-51)$$

$$\cos \beta = \frac{a_2^2 + R^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2 R} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_2^2 - d_2^2 - (d_4^2 + a_3^2)}{2a_2 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}}, \quad (2.3-52)$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta}. \quad (2.3-53)$$

Из равенств (2.3-48) — (2.3-53) можно определить значение функций синуса и косинуса угла  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \sin(\alpha + K \cdot \beta) = \sin \alpha \cos(K \cdot \beta) + \cos \alpha \sin(K \cdot \beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + (\text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ}) \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned} \quad (2.3-54)$$

$$\cos \theta_2 = \cos(\alpha + K \cdot \beta) = \cos \alpha \cos \beta - (\text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ}) \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.3-55)$$

Равенства (2.3-54), (2.3-55) позволяют найти значение  $\theta_2$ :

$$\theta_2 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right], \quad -\pi \leq \theta_2 \leq \pi. \quad (2.3-56)$$

**Решение для третьего сочленения.** Для определения  $\theta_3$  спроецируем вектор  $\mathbf{p}$  на плоскость  $x_2 y_2$  (рис. 2.22). В соответствии с рис. 2.22, как и в предыдущем случае, возможны четыре различные конфигурации манипулятора. Как показано в табл. 2.4, каждой конфигурации соответствует свое выражение для  $\theta_3$ . Па-

раметр  $({}^2\mathbf{p}_4)_y$  представляет собой  $y$ -ю компоненту вектора, выходящего из начала системы координат  $(x_2, y_2, z_2)$  и заканчивающегося в точке пересечения осей последних трех сочленений.

Таблица 2.4. Угол  $\theta_3$  при различных конфигурациях манипулятора

Конфигурация манипулятора	$({}^2\mathbf{p}_4)_y$	$\theta_3$	РУКА	ЛОКОТЬ	РУКА·ЛОКОТЬ
ЛЕВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\geq 0$	$\varphi - \beta$	-1	+1	-1
ЛЕВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\leq 0$	$\varphi - \beta$	-1	-1	+1
ПРАВАЯ ВЕРХНЯЯ рука	$\geq 0$	$\varphi - \beta$	+1	+1	+1
ПРАВАЯ НИЖНЯЯ рука	$\leq 0$	$\varphi - \beta$	+1	-1	-1

Из рис. 2.22 получаем следующие равенства, позволяющие определить  $\theta_3$ :

$$R = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - d_2^2}, \quad (2.3-57)$$

$$\cos \varphi = \frac{a_2^2 + (d_4^2 + a_3^2) - R^2}{2a_2 \sqrt{d_4^2 + a_3^2}}, \quad (2.3-58)$$

$$\sin \varphi = \text{РУКА} \cdot \text{ЛОКОТЬ} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi},$$

$$\sin \beta = \frac{d_4}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}, \quad \cos \beta = \frac{|a_3|}{\sqrt{d_4^2 + a_3^2}}. \quad (2.3-59)$$

В соответствии с табл. 2.4 значение  $\theta_3$  можно представить формулой, единой для всех конфигураций манипулятора:

$$\theta_3 = \varphi - \beta. \quad (2.3-60)$$

Из равенства (2.3-60) получаем следующие выражения для функций синуса и косинуса угла  $\theta_3$ :

$$\sin \theta_3 = \sin(\varphi - \beta) = \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta, \quad (2.3-61)$$

$$\cos \theta_3 = \cos(\varphi - \beta) = \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta. \quad (2.3-62)$$

Из равенств (2.3-61) и (2.3-62) с использованием равенств (2.3-57) — (2.3-59) находим решение для  $\theta_3$ :

$$\theta_3 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_3}{\cos \theta_3} \right], \quad -\pi \leq \theta_3 \leq \pi. \quad (2.3-63)$$

**Решение обратной задачи кинематики для последних трех сочленений.** Зная первые три присоединенных угла, можно сфор-

мировать матрицу  ${}^0T_3$ , часто используемую при решении обратной задачи кинематики для последних трех сочленений. Для манипулятора Пума это решение можно получить, приводя сочленения в соответствие со следующими требованиями:

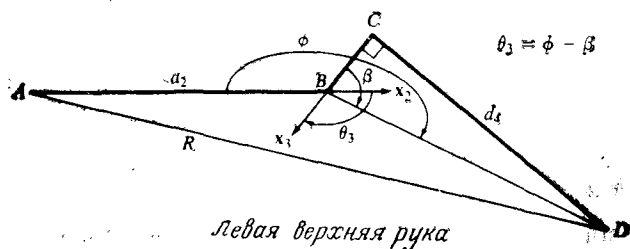
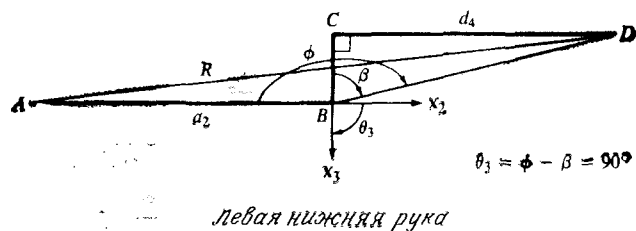
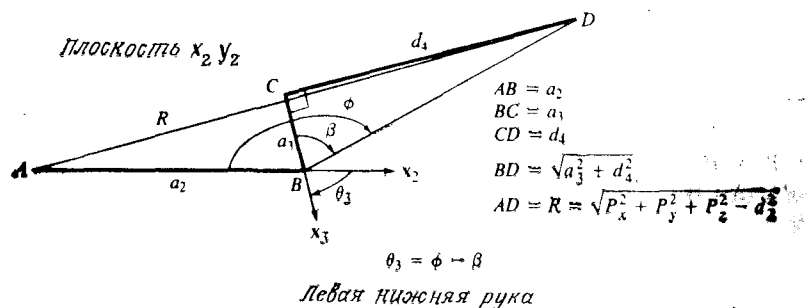


Рис. 2.22. Решение для 3-го сочленения.

1. Сочленение 4 должно быть установлено так, чтобы вращением в сочленении 5 можно было совместить ось вращения сочленения 6 с заданным вектором подхода (вектором  $\mathbf{a}$  матрицы  $\mathbf{T}$ ).
2. Сочленение 5 должно быть установлено так, чтобы ось вращения сочленения 6 совпадала с вектором подхода.
3. Сочленение 6 должно быть установлено так, чтобы ось  $y_6$  совпала с заданным касательным вектором схвата, определяю-

щим его ориентацию. Перечисленные условия соответственно записываются в следующем виде:

$$\mathbf{z}_4 = \frac{\pm (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} \text{ при заданном } \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T, \quad (2.3-64)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_5 \text{ при заданном } \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T, \quad (2.3-65)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{y}_6 \text{ при заданных } \mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T \text{ и } \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T. \quad (2.3-66)$$

В равенстве (2.3-64) векторное произведение может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому возможны два решения для  $\theta_4$ . При равенстве векторного произведения нулю (т. е. ось  $\mathbf{z}_3$  параллельна  $\mathbf{a}$ ) имеет место вырожденный случай. Это происходит, когда оси вращения 4-го и 6-го сочленений параллельны, и означает, что при данной конкретной конфигурации был бы достаточен пятиосный, а не шестиосный манипулятор.

**Решение для четвертого сочленения.** Обе возможные ориентации запястья (ВВЕРХ и ВНИЗ) определяются ориентацией системы координат схвата ( $\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}$ ) относительно системы координат ( $x_5, y_5, z_5$ ). Знак векторного произведения в равенстве (2.3-64) должен быть определен с учетом ориентации  $\mathbf{n}$  или  $\mathbf{s}$  по отношению к единичным векторам  $\mathbf{x}_5$  или  $\mathbf{y}_5$  соответственно, которые в свою очередь ориентированы определенным образом относительно единичного вектора  $\mathbf{z}_4$  в соответствии с правилами выбора систем координат звеньев. (Из рис. 2.11 видно, что единичный вектор  $\mathbf{z}_4$  сонаправлен с единичным вектором  $\mathbf{y}_5$ .)

Предположим сначала, что векторное произведение в равенстве (2.3-64) имеет положительный знак. Признаком этого может служить индикатор ориентации  $\Omega$ , определяемый следующим образом:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{в вырожденном случае;} \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5, & \text{если } \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 \neq 0; \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5, & \text{если } \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5 = 0. \end{cases} \quad (2.3-67)$$

В соответствии с рис. 2.11  $\mathbf{y}_5 = \mathbf{z}_4$ , и, используя равенство (2.3-64), можно представить индикатор ориентации в следующем виде:

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{в вырожденном случае;} \\ \mathbf{s} \cdot \frac{(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} & \text{если } \mathbf{s} \cdot (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}) \neq 0; \\ \mathbf{n} \cdot \frac{(\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a})}{\|\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}\|} & \text{если } \mathbf{s} \cdot (\mathbf{z}_3 \times \mathbf{a}) = 0. \end{cases} \quad (2.3-68)$$

Если наше предположение о знаке векторного произведения в равенстве (2.3-64) не верно, то позже оно будет скорректировано

Таблица 2.5. Различные ориентации запястья

Ориентация запястья	$\Omega = s \cdot y_3$ или $n \cdot y_3$	$M \cdot \text{ЗАПЯСТЬЕ} \cdot \text{sign}(\Omega)$
КИСТЬ ВНИЗ	$\geq 0$	+1 +1
КИСТЬ ВНИЗ	$< 0$	+1 -1
КИСТЬ ВВЕРХ	$\geq 0$	-1 -1
КИСТЬ ВВЕРХ	$< 0$	-1 +1

с помощью индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации  $\Omega$ . Индикатор  $\Omega$  служит признаком начальной ориентации единичного вектора  $z^4$ , обусловленной правилами выбора систем координат звеньев. Индикатор звена ЗАПЯСТЬЕ характеризует выбранную исследователем ориентацию узла запястья в соответствии с определением, содержащимся в равенстве (2.3-33). Если эти индикаторы одного знака, то предположение о знаке векторного произведения в равенстве (2.3-64) верно. Табл. 2.5 устанавливает соответствие между ориентацией запястья и различными комбинациями значений индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации.

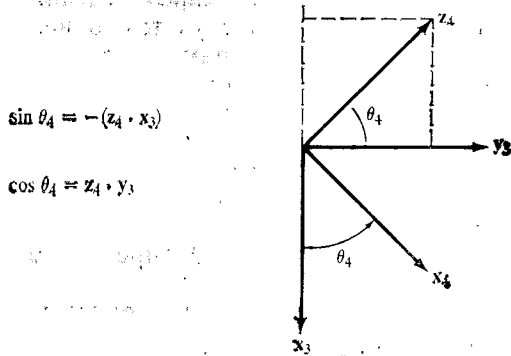


Рис. 2.23. Решение для 4-го сочленения.

между ориентацией запястья и различными комбинациями значений индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации.

Проецируя систему координат  $(x_4, y_4, z_4)$  на плоскость  $x_3y_3$  (рис. 2.23) и используя табл. 2.5, можно получить следующие соотношения:

$$\sin \theta_4 = -M(z_4 \cdot x_3), \quad \cos \theta_4 = M(z_4 \cdot y_3), \quad (2.3-69)$$

где  $x_3$  и  $y_3$  — соответственно первый и второй столбцы матрицы  ${}^0T_3$ ,  $M = \text{ЗАПЯСТЬЕ} \cdot \text{sign}(\Omega)$ , а функция  $\text{sign}$  определяется следующим образом:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \geq 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (2.3-70)$$

Таким образом, с помощью индикатора ЗАПЯСТЬЕ и индикатора ориентации решение для  $\theta_4$  может быть представлено в следующем виде:

$$\theta_4 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_4}{\cos \theta_4} \right] = \arctg \left[ \frac{M(C_1 a_y - S_1 a_x)}{M(C_1 C_{23} a_x + S_1 C_{23} a_y - S_{23} a_z)} \right], \quad -\pi \leq \theta_4 \leq \pi. \quad (2.3-71)$$

В вырожденном случае переменной  $\theta_4$  может быть присвоено любое значение, согласующееся с ориентацией запястья (КИСТЬ ВВЕРХ/ВНИЗ). Это условие всегда удовлетворяется, если положить  $\theta_4$  равным текущему значению  $\theta_4$ . Кроме того, сменив значение ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЯ, можно получить другое решение для  $\theta_4$ :  $\theta_4 = \theta_4 + 180^\circ$ .

**Решение для пятого сочленения.** Для определения  $\theta_5$  воспользуемся условием, состоящим в том, что ось шестого сочленения должна совпадать с заданным вектором подхода ( $a = z_5$ ). Прое-

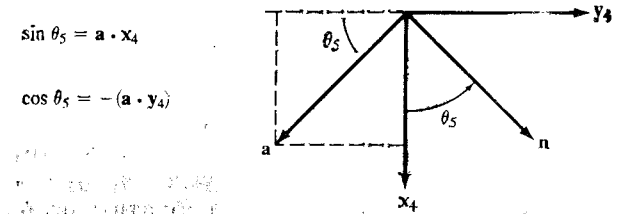


Рис. 2.24. Решение для 5-го сочленения.

цируя систему координат  $(x_5, y_5, z_5)$  на плоскость  $x_4y_4$ , можно показать, что справедливы следующие соотношения (рис. 2.24):

$$\sin \theta_5 = a \cdot x_4, \quad \cos \theta_5 = -(a \cdot y_4), \quad (2.3-72)$$

где  $x_4$  и  $y_4$  — соответственно первый и второй столбцы матрицы  ${}^0T_4$ , а  $a$  — вектор подхода. Таким образом, получено решение для  $\theta_5$ :

$$\theta_5 = \arctg \left[ \frac{\sin \theta_5}{\cos \theta_5} \right] = \arctg \left[ \frac{(C_1 C_{23} C_4 - S_1 S_4) a_x + (S_1 C_{23} C_4 + C_1 S_4) a_y - C_4 S_{23} a_z}{C_1 S_{23} a_x + S_1 S_{23} a_y + C_{23} a_z} \right], \quad -\pi \leq \theta_5 \leq \pi. \quad (2.3-73)$$

Если  $\theta_5 \approx 0$ , имеет место вырожденный случай.

**Решение для шестого сочленения.** Мы получили такие решения  $\theta_4, \theta_5$  для 4-го и 5-го сочленений, что ось шестого сочленения сонаправлена с заданным вектором подхода  $a$ . Теперь мы хотим получить такую ориентацию схвата, которая бы позволила поднять объект манипулирования. Для этого надо так располо-

жить схват, чтобы  $\mathbf{s} = \mathbf{y}_6$ . Проецируя систему координат схвата  $(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a})$  на плоскость  $x_5y_5$ , можно показать, что справедливы следующие равенства (рис. 2.25):

$$\sin \theta_6 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}_5, \quad \cos \theta_6 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{y}_5, \quad (2.3-74)$$

где  $\mathbf{y}_5$  — второй столбец матрицы  ${}^0\mathbf{T}_5$ , а  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{s}$  — соответственно нормальный и касательный векторы матрицы  ${}^0\mathbf{T}_6$ . Таким образом, для  $\theta_6$  имеем

$$\begin{aligned} \theta_6 &= \arctg \left[ \frac{\sin \theta_6}{\cos \theta_6} \right] = \\ &= \arctg \left[ \frac{(-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)n_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)n_y - (S_4S_{23})n_z}{(-S_1C_4 - C_1C_{23}S_4)s_x + (C_1C_4 - S_1C_{23}S_4)s_y + (S_4S_{23})s_z} \right], \\ &-\pi \leq \theta_6 \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.3-75)$$

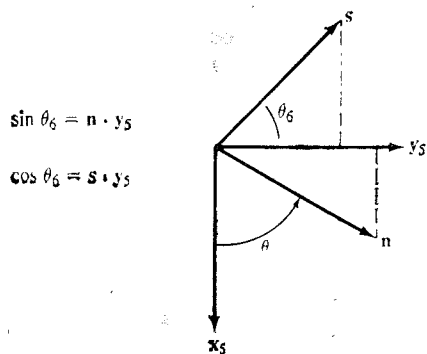


Рис. 2.25. Решение для 6-го сочленения.

Рассмотренный метод решения обратной задачи кинематики основан на геометрической интерпретации условий, накладываемых на положение конечной точки 3-го звена и на положение и ориентацию схвата или инструмента. В предложенном решении для углов  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  и  $\theta_6$  необходимо обратить особое внимание на следующее. Дело в том, что требование совпадения оси 5-го сочленения с векторным произведением  $\mathbf{z}_3$  и  $\mathbf{a}$  может не иметь смысла,

если  $\sin \theta_5 \approx 0$  (т. е.  $\theta_5 \approx 0$ ). В этом случае манипулятор становится вырожденным: оси его 4-го и 6-го сочленений совпадают. В таком состоянии важна только сумма углов  $\theta_4$  и  $\theta_6$ . Угол  $\theta_4$  можно выбрать произвольным образом (обычно выбирают  $\theta_4$  равным его текущему значению), а  $\theta_4 + \theta_6$  выбирается так, чтобы требуемым образом расположить оси  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ . Если ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ «включен» (т. е. ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ = 1), то  $\theta_4 = \theta_4 + \pi$ ,  $\theta_5 = -\theta_5$ ,  $\theta_6 = \theta_6 + \pi$ .

Итак, для шестизвеного манипулятора Пума существует восемь решений обратной задачи кинематики. Решения для первых трех присоединенных углов  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  обеспечивают требуемое расположение руки (первых трех звеньев), а выбором углов  $\theta_4$ ,  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  обеспечивается заданная ориентация схвата. Для первых трех присоединенных углов существуют четыре решения: два — для манипулятора с левосторонней конфигурацией и два — с правосторонней. Для каждой конкретной конфигурации манипулятора равенства (2.3-47), (2.3-56), (2.3-63), (2.3-71),

(2.3-73), (2.3-75) дают решение  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$  обратной задачи кинематики, причем  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 + \pi, -\theta_5, \theta_6 + \pi)$  также является решением этой задачи (если ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬ «включен»).

Уравнения вида конфигурации для определения индикаторов конфигурации манипулятора. Полученное в предыдущем разделе решение обратной задачи кинематики для манипулятора типа Пума не единственно и зависит от индикаторов конфигурации, задаваемых исследователем. Эти индикаторы можно также определить, зная присоединенные углы. В этом разделе получены соответствующие уравнения конфигурации для каждого из рассмотренных индикаторов. Решение уравнения дает значение соответствующего индикатора в соответствии с определениями (2.3-31) — (2.3-33).

Для индикатора РУКА, следуя определению ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ руки, уравнение конфигурации можно записать в виде

$$\begin{aligned} g(\theta, \mathbf{p}) &= \mathbf{z}_0 \cdot \frac{\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} = \\ &= \mathbf{z}_0 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|} = \frac{-p_y \sin \theta_1 - p_x \cos \theta_1}{\|\mathbf{z}_1 \times \mathbf{p}'\|}, \end{aligned} \quad (2.3-76)$$

где  $\mathbf{p}' = (p_x, p_y, 0)^T$  — проекция вектора  $\mathbf{p}$  (равенство (2.2-36)) на плоскость  $x_0y_0$ ,  $\mathbf{z}_1 = (-\sin \theta_1, \cos \theta_1, 0)^T$  — третий столбец матрицы  ${}^0\mathbf{T}_1$  и  $\mathbf{z}_0 = (0, 0, 1)^T$ . Возможны следующие варианты:

1. Если  $g(\theta, \mathbf{p}) > 0$ , реализована конфигурация ПРАВОЙ руки.
2. Если  $g(\theta, \mathbf{p}) < 0$ , реализована конфигурация ЛЕВОЙ руки.
3. Если  $g(\theta, \mathbf{p}) = 0$ , конфигурация манипулятора одновременно соответствует определению как ПРАВОЙ, так и ЛЕВОЙ руки: манипулятор находится внутри цилиндра радиусом  $d_2$  (рис. 2.19). В этом случае принимается для определенности, что реализована конфигурация правой руки (РУКА = +1).

Поскольку знаменатель выражения (2.3-76) всегда положителен, определение ЛЕВОЙ/ПРАВОЙ конфигурации сводится к определению знака числителя  $g(\theta, \mathbf{p})$ :

$$\text{РУКА} = \text{sign}[g(\theta, \mathbf{p})] = \text{sign}(-p_x \cos \theta_1 - p_y \sin \theta_1), \quad (2.3-77)$$

где функция sign определена равенством (2.3-70). Подстановкой первой и второй компонент вектора  $\mathbf{p}$  из равенства (2.3-36) в равенство (2.3-77) получаем

$$\text{РУКА} = \text{sign}[g(\theta, \mathbf{p})] = \text{sign}[g(\theta)] = \text{sign}(-d_4S_{23} - a_{23}C_{23} - a_2C_2). \quad (2.3-78)$$

Следовательно, из уравнения (2.3-78) значение индикатора РУКА для ПРАВОЙ/ЛЕВОЙ конфигурации манипулятора уста-

навливается следующим образом:

$$РУКА = \text{sign}(-d_4 S_{23} - a_3 C_{23} - a_2 C_2) = \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{ПРАВЯЯ рука,} \\ -1 \Rightarrow \text{ЛЕВАЯ рука.} \end{cases} \quad (2.3-79)$$

При выводе уравнения конфигурации для индикатора ЛОКОТЬ используем определение ВЕРХНЕЙ/НИЖНЕЙ руки. Взяв  $({}^2p_4)_y$  и индикатор РУКА из табл. 2.4, получим уравнение конфигурации для индикатора ЛОКОТЬ, использующее знак второй компоненты вектора положения матрицы  ${}^2A_3{}^3A_4$  и индикатор РУКА:

$$\begin{aligned} \text{ЛОКОТЬ} &= РУКА \cdot \text{sign}(d_4 C_3 - a_3 S_3) = \\ &= \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{ЛОКОТЬ выше запястья,} \\ -1 \Rightarrow \text{ЛОКОТЬ ниже запястья.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-80)$$

Для индикатора ЗАПЯСТЬЕ, следуя определению возможных конфигураций запястья (КИСТЬ ВВЕРХ/ВНИЗ), сформируем скалярное произведение единичных векторов  $s$  и  $y_5$  (или  $z_4$ ).

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если } s \cdot z_4 > 0 \\ -1, & \text{если } s \cdot z_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(s \cdot z_4). \quad (2.3-81)$$

Если  $s \cdot z_4 = 0$ , значение индикатора ЗАПЯСТЬЕ можно определить из следующего выражения:

$$\text{ЗАПЯСТЬЕ} = \begin{cases} +1, & \text{если } n \cdot z_4 > 0 \\ -1, & \text{если } n \cdot z_4 < 0 \end{cases} = \text{sign}(n \cdot z_4). \quad (2.3-82)$$

Объединяя равенства (2.3-81) и (2.3-82), получим

$$\begin{aligned} \text{ЗАПЯСТЬЕ} &= \begin{cases} \text{sign}(s \cdot z_4), & \text{если } s \cdot z_4 \neq 0 \\ \text{sign}(n \cdot z_4), & \text{если } s \cdot z_4 = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} +1 \Rightarrow \text{КИСТЬ ВНИЗ,} \\ -1 \Rightarrow \text{КИСТЬ ВВЕРХ.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3-83)$$

Полученные уравнения конфигурации позволяют проверить решение обратной задачи кинематики. С их помощью при решении прямой задачи кинематики вычисляются значения индикаторов конфигурации, которые затем используются для решения обратной задачи кинематики (рис. 2.26).

**Машинное моделирование.** Для проверки правильности решения обратной задачи кинематики манипулятора Пума, изображенного на рис. 2.11, может быть составлена программа для ЭВМ. Первоначально в программе задается положение манипулятора в пределах допустимых значений присоединенных углов. При-

соединенные углы являются входами в программу решения прямой задачи кинематики, которая формирует матрицу манипулятора  $T$ . Присоединенные углы используются также в уравнениях конфигурации, из которых определяются значения трех индикаторов конфигурации манипулятора. Значения индикаторов совместно с матрицей  $T$  являются входами в программу решения обратной задачи кинематики, вычисляющую присоединенные

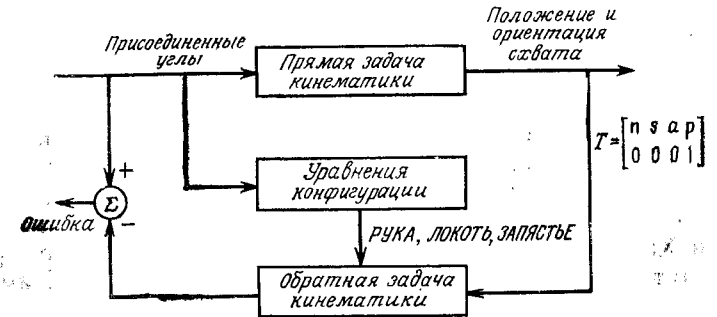


Рис. 2.26. Моделирование решения обратной задачи кинематики на ЭВМ.

углы, которые должны совпасть с присоединенными углами, являющимися входами в программу решения прямой задачи кинематики. Блок-схема такой модели представлена на рис. 2.26.

## 2.4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе мы рассмотрели прямую и обратную задачи кинематики манипулятора. Были определены параметры звеньев и сочленений манипулятора, а для описания положения звеньев относительно фиксированной системы координат было введено понятие однородной матрицы преобразования размерностью  $4 \times 4$ . Для шестизвенного манипулятора типа Пума получены соотношения, решающие прямую задачу кинематики.

Сформулирована обратная задача кинематики. С помощью метода обратных преобразований получено решение обратной задачи в эйлеровых координатах. Метод обратных преобразований позволяет решать обратную задачу кинематики простых манипуляторов, однако он не дает возможности раскрыть геометрический смысл задачи. В связи с этим на примере решения обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора с вращательными сочленениями рассмотрен геометрический подход. В решении использовались три индикатора конфигурации манипулятора (РУКА, ЛОКОТЬ, ЗАПЯСТЬЕ). Для шестизвенного манипулятора типа Пума существует восемь различных решений обратной задачи кинематики: четыре — для первых трех сочленений, и каждому из этих четырех соответствуют еще два воз-

можных решения для трех последних сочленений. Правильность решений прямой и обратной задач кинематики может быть проверена с помощью моделирования на ЭВМ. При соответствующих изменениях и дополнениях геометрический подход может быть обобщен для других простых промышленных манипуляторов с вращательными сочленениями. Рассмотренные в этой главе понятия, связанные с кинематикой манипуляторов, будут широко использоваться в третьей главе для вывода уравнений движения, описывающих динамику манипулятора.

## Литература

Дополнительный материал по теории матриц можно найти в книгах Беллмана [21], Фрезера [82] и Гантмахера [92]. О применении матриц для описания положения в пространстве твердого механического объекта можно прочесть в статье Денавита и Хартенберга [57], а также в книге этих авторов [116]. Дополнительный материал об однородных координатах имеется в работах таких авторов, как Дуда и Харт [66] и Ньюмен и Спрулл [212]. Основные вопросы кинематики рассмотрены в статье Ли [154]. Более подробно этот раздел освещен в работах Хартенберга и Денавита [116], Зука и Радклифа [273]. Хотя матричное описание взаимного расположения звеньев дает способ последовательного решения прямой задачи кинематики, векторный подход к этой задаче позволяет получить решение в более компактной форме. Это обсуждается в работе Чейза [41]. К числу других книг по кинематике роботов можно отнести работы Пола [229], Ли, Гонсалеса и Фу [163], Снайдера [270].

В докторской диссертации Пайпера [235] обратная задача кинематики решается алгебраическими методами. Решение этой задачи методом обратных преобразований рассмотрено в работе Пола и др. [231]. Геометрический подход к решению обратной задачи кинематики шестиизвального манипулятора с вращательными сочленениями основан на работе Ли и Цайглера [168]. Решение этой задачи для станфордского манипулятора можно найти в работе Левиса [169]. Другие способы решения обратной задачи кинематики можно найти в следующих работах: [56, 69, 149, 284, 318, 319, 321]. Наконец, последние работы по робототехнике содержатся в учебном пособии Ли, Гонсалеса и Фу [163].

## Упражнения

2.1. Найдите матрицу поворота, являющегося результатом последовательного выполнения поворотов сначала на угол  $30^\circ$  вокруг оси  $OZ$ , на  $60^\circ$  вокруг оси  $OX$  и затем на  $90^\circ$  вокруг оси  $OY$ .

2.2. Найдите матрицу поворота, являющегося результатом последовательного выполнения поворотов сначала на угол  $\varphi$  вокруг оси  $OX$ , на угол  $\psi$  вокруг оси  $OY$  и затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $OZ$ .

2.3. Найдите последовательность поворотов, отличную от описанной в задаче 2.2, но имеющую ту же матрицу результирующего поворота.

2.4. Выведите формулы для  $\sin(\varphi + \theta)$  и  $\cos(\varphi + \theta)$ , раскрывая выражение, представляющее матрицу суммарного поворота в виде произведения матриц элементарных поворотов.

2.5. Определите матрицу  $T$ , описывающую результат последовательного выполнения следующих преобразований: поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX$ , сдвиг на  $b$  единиц длины вдоль оси  $OZ$  и затем поворот угла  $\varphi$  вокруг оси  $OY$ .

2.6. Определите в соответствии с рис. 2.27 однородные матрицы преобразований  ${}^{i-1}A_i$  и  ${}^0A_i$  для  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

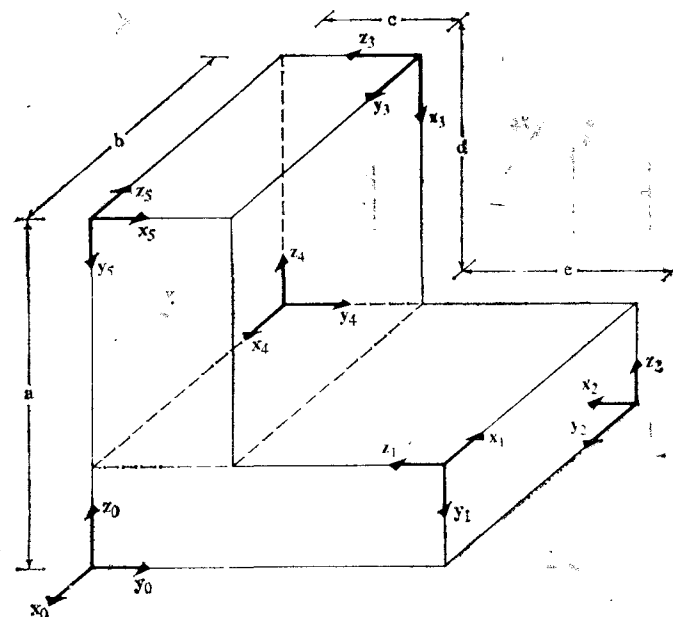


Рис. 2.27. Схема систем координат для упражнения (2.6) нахождения однородной матрицы преобразования.

2.7. Определите в соответствии с рис. 2.28 однородные матрицы преобразований  ${}^{i-1}A_i$  и  ${}^0A_i$  для  $i = 1, 2, 3, 4$ .

2.8. Робототехнический комплекс оборудован телевизионной камерой (см. пример из разд. 2.2.11). В поле зрения камеры находятся точка начала базовой системы координат, в которой закреплен манипулятор, а также объект манипулирования — куб. Если в центре куба поместить локальную систему координат, то его положение относительно камеры будет определяться однородной матрицей  $T_1$ . Аналогично, положение базовой системы координат относительно камеры может быть задано однородной матрицей  $T_2$ , где

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

а) К сожалению, после того как оборудование было установлено и были выбраны указанные системы координат, кто-то развернул камеру на  $90^\circ$  вокруг ее оси  $z$ . Каковы стали положение и ориентация камеры по отношению к базовой системе координат робота?

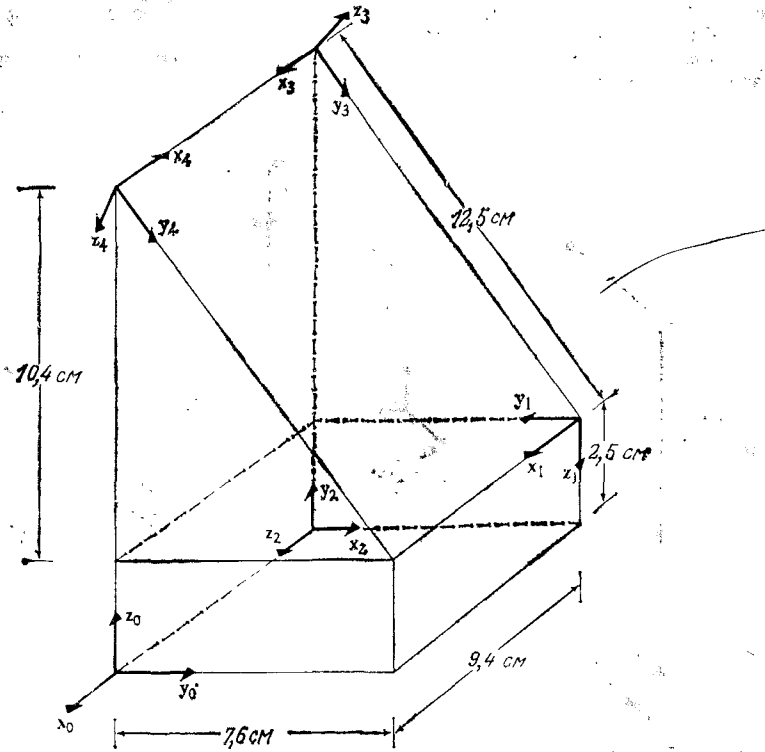
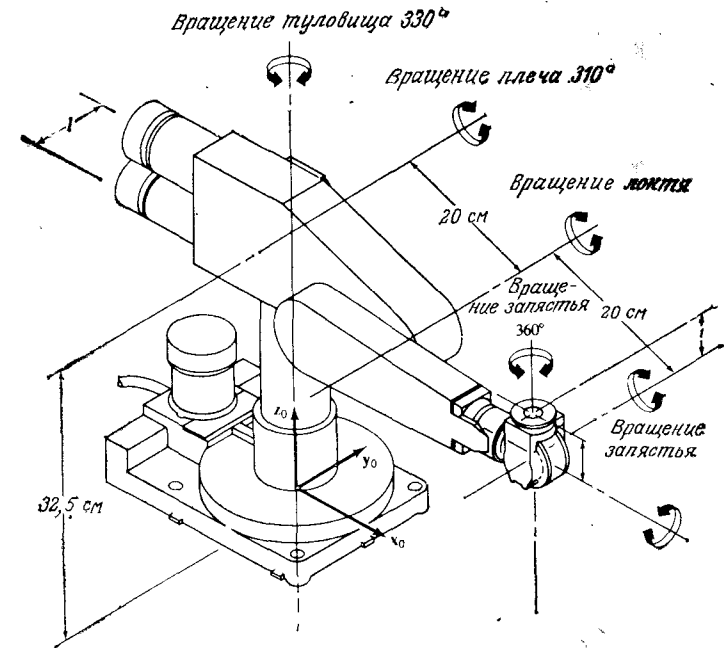


Рис. 2.28. Схема систем координат для упражнения (2.7) нахождения однородной матрицы преобразования.

б) После того, как вы ответили на вопрос а), тот же человек сначала развернул объект манипулирования на  $90^\circ$  вокруг его оси  $x$ , а затем сдвинул его на 4 единицы вдоль повернутой оси  $y$ . Определите положение и ориентацию объекта манипулирования относительно базовой системы координат робота и относительно повернутой системы координат камеры.

2.9. Мы рассмотрели геометрический способ решения обратной задачи кинематики манипулятора Пума. Определите в терминах требуемого числа операций сложения и умножения и обращений к программам вычисления трансцендентных функций вычислительные ресурсы, необходимые для решения этой задачи на ЭВМ (если некоторая операция повторяется, ее нужно учитывать только один раз).

2.10. Определите ортонормированные системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , для звеньев манипулятора Пума 260, изображенного на рис. 2.29, и заполните следующую таблицу:



Параметры систем координат звеньев манипулятора Пума

Сочленение $i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$
1				
2				
3				
4				
5				
6				

Рис. 2.29. Звенья, сочленения и присоединенные углы (обобщенные координаты) манипулятора Пума 260.

2.11. Определите ортонормированные системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , для звеньев манипулятора MINIMOVER, показанного на рис. 2.30, и заполните следующую таблицу:



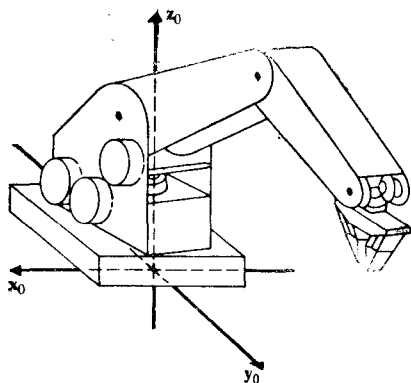


Рис. 2.30. Схема манипулятора MINIMOVER.

2.12. Станфордский манипулятор установлен в положение, показанное на рис. 2.31. Присоединенные переменные для такого положения манипулятора имеют значения  $q = (90^\circ, -120^\circ, 22 \text{ см}, 0^\circ, 70^\circ, 90^\circ)^T$ . Определите ортонормированные системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , для этого манипулятора и заполните следующую таблицу:

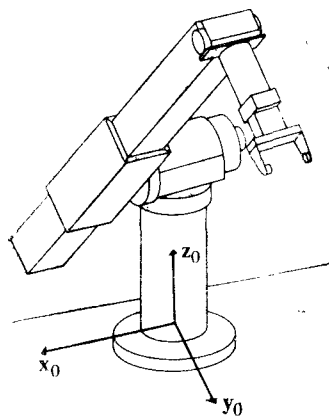


Рис. 2.31. Схема станфордского манипулятора.

2.13. Используя матрицы  ${}^{i-1}A_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) для манипулятора Пума, представленные в разд. 2.2.10, определите ошибку положения конца 3-го звена, обусловленную ошибками измерений первых трех присоединенных углов  $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ . Воспользуйтесь схемой аппроксимации первого порядка.

2.14. Решите задачу 2.13 для станфордского манипулятора, показанного на рис. 2.12.

2.15. На рис. 2.32 показан манипулятор с двумя степенями свободы. Зная, что длина каждого из звеньев составляет 1 м, определите системы ко-

Параметры систем координат звеньев манипулятора MINIMOVER

Сочленение $i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$
1				
2				
3				
4				
5				

Параметры систем координат звеньев станфордского манипулятора

Сочленение $i$	$\theta_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$
1				
2				
3				
4				
5				
6				

ординат звеньев и найдите  ${}^0A_1$  и  ${}^1A_2$ . Для этого манипулятора решите обратную задачу кинематики.

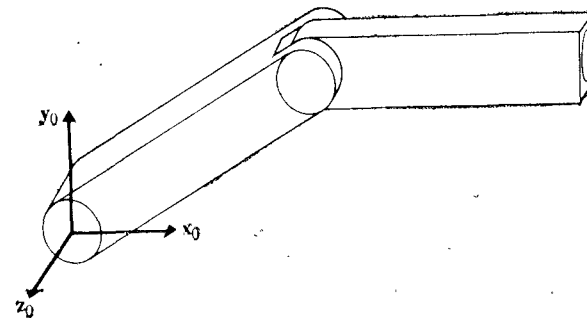


Рис. 2.32. Схема манипулятора с двумя степенями свободы.

2.16. Предположим, что для манипулятора Пума, показанного на рис. 2.11, при решении обратной задачи кинематики найдены первые три присоединенные переменные  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  и, кроме того, заданы  ${}^{i-1}A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) и  ${}^0T_6$ . Используя метод обратных преобразований, найдите последние три присоединенные переменные  $(\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ . Сравните полученное решение с тем, которое дается равенствами (2.3-71), (2.3-73) и (2.3-75).

2.17. Для станфордского манипулятора, изображенного на рис. 2.12, найдите первые три присоединенных угла. Воспользуйтесь любым удобным для вас способом.

2.18. Решите задачу 2.16 для станфордского манипулятора, изображенного на рис. 2.12.

## Глава 3. ДИНАМИКА МАНИПУЛЯТОРА

Никакие усилия не могут предотвратить неизбежное.

*Оливер Вендел Холмс*

### 3.1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом динамики манипулятора как раздела робототехники является математическое описание действующих на манипулятор сил и моментов в форме уравнений динамики движения. Такие уравнения необходимы для моделирования движения манипулятора с помощью ЭВМ, при выборе законов управления и при оценке качества кинематической схемы и конструкции манипулятора. В этой главе внимание сосредоточено на выводе и исследовании свойств уравнений движения, пригодных для использования в задачах управления манипулятором. Управление манипулятором осуществляется с целью обеспечения некоторого заранее заданного поведения системы. В общем случае характер функционирования манипулятора зависит от эффективности алгоритмов управления и используемой динамической модели манипулятора. Задача управления включает задачу формирования динамической модели реального манипулятора и задачу выбора законов или стратегий управления, обеспечивающих выполнение поставленных целей. Эта глава посвящена построению модели и исследованию динамики поведения управляемого манипулятора.

Динамическая модель манипулятора может быть построена на основе использования известных законов ньютоновой или лагранжовой механики. Результатом применения этих законов являются уравнения, связывающие действующие в сочленениях силы и моменты с кинематическими характеристиками и параметрами движения звеньев. Таким образом, уравнения динамики движения реального манипулятора могут быть получены традиционными методами Лагранжа — Эйлера или Ньютона — Эйлера. С помощью этих двух методов получен ряд различных форм уравнений движения, эквивалентных в том смысле, что они описывают динамику движения одной и той же физической системы. К ним относятся уравнения, полученные Уикером [223, 16] с помощью метода Лагранжа — Эйлера; рекуррентные уравнения, полученные Холлербахом [122] с помощью того же метода;

уравнения, полученные Лу [185] методом Ньютона — Эйлера; уравнения, полученные Ли [166] с применением обобщенных уравнений Д'Аламбера. Все эти уравнения различны по форме, поскольку были получены для разных целей. Некоторые из них обеспечивают минимальное время вычисления управляющих моментов в сочленениях манипулятора, другие используются при синтезе и анализе законов управления, третьи применяются для моделирования движения манипулятора с помощью ЭВМ.

Вывод уравнений динамики движения манипулятора методом Лагранжа — Эйлера отличается простотой и единством подхода. В рамках предположения о том, что звенья представляют собой твердые тела, этот подход приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Бьесци [16], пользуясь для описания кинематической цепи матрицами преобразования однородных координат и уравнениями Лагранжа — Эйлера, показал, что уравнения динамики движения станфордского шестизвенного манипулятора существенно нелинейны и отражают эффекты, связанные с действием сил инерции, обусловленных ускоренным движением звеньев, действием кориолисовых и центробежных сил, а также действием силы тяжести. Более того, действующие в сочленениях силы и моменты зависят от параметров манипулятора, мгновенных значений присоединенных переменных, скоростей и ускорений, а также перемещаемого манипулятором груза. Уравнения Лагранжа — Эйлера обеспечивают строгое описание динамики состояния манипулятора и могут быть использованы для разработки усовершенствованных законов управления в пространстве присоединенных переменных. В меньшей степени они используются для решения прямой и обратной задач динамики. Прямая задача состоит в том, чтобы по заданным силам и моментам определить обобщенные ускорения, интегрирование которых позволяет получить значения обобщенных координат и скоростей. Обратная задача динамики заключается в том, чтобы по заданным обобщенным координатам, скоростям и ускорениям определить действующие в сочленениях манипулятора силы и моменты. Для решения обеих названных задач, как правило, необходимо вычислять динамические коэффициенты  $D_{ik}$ ,  $h_{ikm}$  и  $c_i$ , определяемые равенствами (3.2-31), (3.2-33) и (3.2-34) соответственно. Вычисление этих коэффициентов требует выполнения очень большого числа арифметических операций. В связи с этим уравнения Лагранжа — Эйлера без дополнительных упрощений практически неприменимы для обеспечения управления манипулятором в реальном времени.

С целью получения более эффективных с вычислительной точки зрения алгоритмов расчета обобщенных сил и моментов некоторые исследователи [6, 185, 233] использовали уравнения Ньютона — Эйлера. Вывод уравнений движения манипулятора

методом Ньютона — Эйлера прост по содержанию, но весьма трудоемок. Результатом является система прямых и обратных рекуррентных уравнений, последовательно применяемых к звеньям манипулятора. С помощью прямых уравнений последовательно от основания к схвату вычисляются кинематические характеристики движения звеньев, такие, как линейные и угловые скорости и ускорения, линейные ускорения центров масс звеньев. Обратные уравнения позволяют последовательно от схвата к основанию вычислить силы и моменты, действующие на каждое из звеньев. Наиболее важный результат такого подхода состоит в том, что время, необходимое для вычисления обобщенных сил и моментов, прямо пропорционально числу сочленений, но не зависит от реализующейся в процессе движения конфигурации манипулятора. Это позволяет реализовать простые законы управления манипулятором в реальном времени.

Низкая вычислительная эффективность уравнений Лагранжа — Эйлера обусловлена в основном тем, что для описания кинематической цепи используются матрицы преобразования однородных координат. Уравнения Ньютона — Эйлера обладают большей вычислительной эффективностью, что связано с векторным представлением и их рекуррентной природой. Холлербахом [122] была сделана попытка повысить вычислительную эффективность уравнений Лагранжа — Эйлера за счет их рекуррентной природы. Однако полученные им рекуррентные уравнения потеряли «аналитичность», столь полезную при синтезе управления в пространстве состояний. Для синтеза законов управления желательно иметь в распоряжении замкнутую систему дифференциальных уравнений, точно описывающую динамику движения манипулятора. Кроме того, желательно, чтобы в этих уравнениях можно было легко выделить составляющие, отражающие действие сил инерции различной природы, с тем чтобы выбором закона управления обеспечить их максимальную компенсацию [130]. Еще один подход к формированию эффективной в вычислительном плане системы точных уравнений движения основан на применении принципа Д'Аламбера. Этот подход позволяет получить уравнения движения в векторно-матричной форме, удобной для анализа. Помимо того, что эти уравнения обеспечивают снижение по сравнению с уравнениями Лагранжа — Эйлера вычислительных затрат на расчет динамических коэффициентов, они позволяют различать динамические эффекты, обусловленные вращательным и поступательным движением звеньев, что весьма полезно при синтезе управления в пространстве состояний. Вычислительная эффективность этих уравнений обусловлена использованием для описания кинематики звеньев матриц поворотов и векторов относительного положения.

В этой главе уравнения движения манипулятора получены методом Лагранжа — Эйлера, методом Ньютона — Эйлера, а

также с помощью принципа Д'Аламбера. Все три подхода проиллюстрированы на примере простого двухзвенного манипулятора. Так как динамические коэффициенты уравнений движения необходимо определять и в задачах выбора закона управления, и при моделировании движения манипулятора с помощью ЭВМ, для каждой системы уравнений движения найдено число необходимых для их реализации математических операций сложения и умножения. Затраты на вычисление обобщенных сил и моментов с применением обобщенных уравнений Д'Аламбера имеют порядок  $O(n^3)$ , с применением уравнений Лагранжа — Эйлера —  $O(n^4)$  (при оптимизации —  $O(n^3)$ , с применением уравнений Ньютона — Эйлера —  $O(n)$ , где  $n$  — число степеней свободы манипулятора.

### 3.2. МЕТОД ЛАГРАНЖА — ЭЙЛЕРА

Полное описание движения манипулятора можно получить, применяя метод Лагранжа — Эйлера для неконсервативных систем. Описав кинематику манипулятора с помощью матричного представления Денавита — Хартенберга, можно, пользуясь лагранжевым формализмом, получить уравнения динамики. Такое совместное использование Д-Х-представления и метода Лагранжа приводит к компактной векторно-матричной форме уравнений движения, удобной для аналитического исследования и допускающей реализацию на ЭВМ.

Вывод уравнений динамики движения манипулятора основан на следующем:

1. На описании взаимного пространственного расположения систем координат  $i$ -го и  $(i-1)$ -го звеньев с помощью матрицы преобразования однородных координат  ${}^{i-1}A_i$ . Эта матрица преобразует координаты произвольной точки относительно  $i$ -й системы координат в координаты этой же точки относительно  $(i-1)$ -й системы координат.
2. На использовании уравнения Лагранжа — Эйлера

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2-1)$$

в котором  $L$  — функция Лагранжа ( $L = K - P$ ),  $K$  — полная кинетическая энергия манипулятора,  $P$  — полная потенциальная энергия манипулятора,  $q_i$  — обобщенные координаты манипулятора,  $\dot{q}_i$  — первая производная по времени обобщенных координат,  $\tau_i$  — обобщенные силы (или моменты), создаваемые в  $i$ -м сочленении для реализации заданного движения  $i$ -го звена.

Для того чтобы воспользоваться уравнением Лагранжа — Эйлера, необходимо выбрать систему обобщенных координат.

Обобщенные координаты представляют собой набор координат, обеспечивающий полное описание положения рассматриваемой физической системы в абсолютной системе координат. Существуют различные системы обобщенных координат, пригодные для описания простого манипулятора с вращательными и поступательными сочленениями. Однако поскольку углы поворотов в сочленениях непосредственно доступны измерению с помощью потенциометров или других датчиков, то они составляют наиболее естественную систему обобщенных координат. В этом случае обобщенные координаты совпадают с присоединенными переменными манипулятора. В частности, если  $i$ -е сочленение — вращательное, то  $q_i \equiv \theta_i$ , если же  $i$ -е сочленение — поступательное, то  $q_i \equiv d_i$ .

В излагаемом ниже выводе уравнений движения манипулятора с  $n$  степенями свободы используются матрицы преобразования однородных координат, рассмотренные в гл. 2.

### 3.2.1. Скорость произвольной точки звена манипулятора

Для того чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа — Эйлера, необходимо знать кинетическую энергию рассматриваемой физической системы, а следовательно, и скорости всех ее точек. В этом разделе получены соотношения, определяющие скорость точки, неподвижной относительно  $i$ -го звена, с учетом движения всех сочленений манипулятора.

Рассмотрим произвольную точку, неподвижную относительно  $i$ -го звена и заданную в системе координат  $i$ -го звена однородными координатами  ${}^i\mathbf{r}_i$  (рис. 3.1)

$${}^i\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T. \quad (3.2-2)$$

Обозначим через  ${}^0\mathbf{r}_i$  координаты этой же точки относительно базовой системы координат. Как и выше,  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  обозначает матрицу преобразования однородных координат, определяющую пространственное положение системы координат  $i$ -го звена относительно системы координат  $(i-1)$ -го звена, а  ${}^0\mathbf{A}_i$  — матрицу, определяющую связь между системой координат  $i$ -го звена и базовой системой координат. Тогда связь между  ${}^0\mathbf{r}_i$  и  ${}^i\mathbf{r}_i$  определяется соотношением

$${}^0\mathbf{r}_i = {}^0\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i, \quad (3.2-3)$$

где  ${}^0\mathbf{A}_i = {}^0\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i. \quad (3.2-4)$

Если  $i$ -е сочленение — вращательное, то, как следует из равенства (2.2-29), матрица  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  имеет вид

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2-5)$$

Если  $i$ -е сочленение — поступательное, то в соответствии с равенством (2.2-31) матрица  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  имеет следующий вид:

$${}^{i-1}\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2-6)$$

В общем случае все ненулевые элементы матрицы  ${}^0\mathbf{A}_i$  яв-

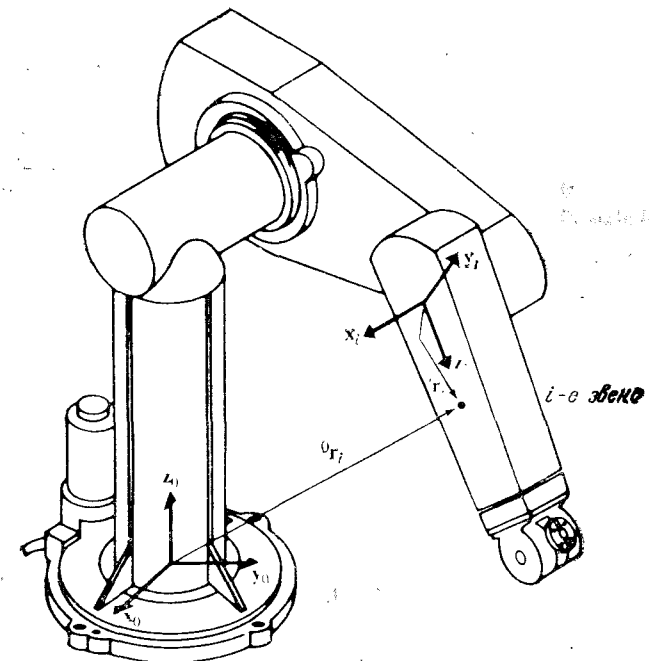


Рис. 3.1. Точка  ${}^i\mathbf{r}_i$   $i$ -го звена.

ляются функциями величин  $\theta_j$ ,  $d_j$ ,  $\alpha_j$  и  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, i$ ), причем в зависимости от типа  $j$ -го сочленения  $\theta_j$  или  $d_j$  представляет собой присоединенную переменную этого сочленения, а ос-

тальные величины являются известными параметрами, определяемыми кинематической структурой манипулятора. Для вывода уравнений движения, описывающих как вращательные, так и поступательные сочленения, мы будем использовать обобщенные координаты  $q_i$ . Переменная  $q_i$  совпадает с  $\theta_i$ , если  $i$ -е сочленение — вращательное, и с  $d_i$ , если  $i$ -е сочленение — поступательное.

В рамках предположения о том, что звенья манипулятора представляют собой твердые тела, точка  ${}^i\mathbf{r}_i$  так же, как и любая другая точка  $i$ -го звена, имеет нулевую скорость относительно  $i$ -й системы координат, не являющейся в общем случае инерциальной. Скорость точки  ${}^i\mathbf{r}_i$  относительно базовой системы координат может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_i &\equiv \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} ({}^0\mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt} ({}^0\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i) = \\ &= {}^0\dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{A}_2 \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i + {}^0\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{A}}_2 \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i {}^i\mathbf{r}_i + \dots \\ &\dots + {}^0\mathbf{A}_1 \dots {}^{i-1}\dot{\mathbf{A}}_i {}^i\mathbf{r}_i + {}^0\mathbf{A}_i \dot{{}^i\mathbf{r}}_i = \left[ \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^i\mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

При выводе этого уравнения использовалось условие  $\dot{{}^i\mathbf{r}}_i = 0$ . Частные производные матрицы  ${}^0\mathbf{A}_i$  по переменным  $q_i$  легко вычислить с помощью матрицы  $\mathbf{Q}_i$ , которая для вращательного сочленения имеет вид

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2-8a)$$

а для поступательного сочленения

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2-8b)$$

Используя эту матрицу, можно написать

$$\frac{\partial {}^{i-1}\mathbf{A}_i}{\partial q_i} = \mathbf{Q}_i {}^{i-1}\mathbf{A}_i. \quad (3.2-9)$$

Например, для манипулятора с вращательными сочленениями  $q_i = \theta_i$ . Используя равенство (3.2-5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{i-1}\mathbf{A}_i}{\partial \theta_i} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta_i & -\cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & -a_i \sin \theta_i \\ \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ 0 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{Q}_i {}^{i-1}\mathbf{A}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial {}^0\mathbf{A}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots {}^{i-2}\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_j \dots {}^{i-1}\mathbf{A}_i, & \text{если } j \leq i; \\ 0, & \text{если } j > i. \end{cases} \quad (3.2-10)$$

По смыслу равенство (3.2-10) описывает изменение положения точек  $i$ -го звена, вызванное движением в  $j$ -м сочленении манипулятора. Для упрощения формул введем обозначение  $\mathbf{U}_{ij} \triangleq \partial {}^0\mathbf{A}_i / \partial q_j$ , с учетом которого равенство (3.2-10) можно представить в следующем виде для  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\mathbf{U}_{ij} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1} \mathbf{Q}_j {}^{j-1}\mathbf{A}_i, & \text{если } j \leq i; \\ 0, & \text{если } j > i. \end{cases} \quad (3.2-11)$$

Используя введенное обозначение, формулу для  $\mathbf{v}_i$  можно представить в форме

$$\mathbf{U}_i = \left[ \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \dot{q}_j \right] {}^i\mathbf{r}_i. \quad (3.2-12)$$

Следует отметить, что частная производная матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  по переменной  $q_i$  уже не является матрицей преобразования однородных координат. Если рассматривается вращательное сочленение, то умножение матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  слева на матрицу  $\mathbf{Q}_i$  эквивалентно перестановке первых двух строк матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  с последующим изменением знака всех элементов первой строки на противоположный и обнулением всех элементов третьей и четвертой строк. Для поступательного сочленения эффект такого

умножения состоит в перестановке третьей и четвертой строк матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  и последующем обнулении элементов всех строк, кроме третьей. Смысл использования матрицы  $\mathbf{Q}_i$  состоит в том, чтобы сохранить в формулах матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  и все операции производить только с ними.

Определим величину, характеризующую эффект взаимодействия сочленений, следующим образом:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} \triangleq \mathbf{U}_{ijk} = \begin{cases} {}^0\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{Q}_j^{j-1}\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_k^{k-1}\mathbf{A}_i, & \text{если } i \geq k \geq j; \\ {}^0\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{Q}_k^{k-1}\mathbf{A}_{j-1}\mathbf{Q}_j^{j-1}\mathbf{A}_i, & \text{если } i \geq j \geq k; \\ 0, & \text{если } i < j \text{ или } i < k. \end{cases} \quad (3.2-13)$$

Например, для манипулятора с вращательными сочленениями при  $i = j = k = 1$  и  $q_1 = \theta_1$  имеем

$$\frac{\partial U_{11}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\mathbf{Q}_1^0 \mathbf{A}_1) = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^0 \mathbf{A}_1.$$

### 3.2.2. Кинетическая энергия манипулятора

Зная скорость произвольной точки каждого звена манипулятора, найдем кинетическую энергию  $i$ -го звена. Обозначим через  $K_i$  кинетическую энергию  $i$ -го звена ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Пусть  $dK_i$  обозначает кинетическую энергию элемента массы  $dm$   $i$ -го звена. Тогда

$$\begin{aligned} dK_i &= 1/2 (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) dm = 1/2 \text{ след } (\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T) dm = \\ &= 1/2 \text{Tr} (\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T) dm. \end{aligned} \quad (3.2-14)$$

Здесь вместо скалярного произведения используется оператор  $\text{Tr}$  (след матрицы)<sup>1)</sup>, что в дальнейшем позволит перейти к матрице инерции  $\mathbf{J}_i$   $i$ -го звена. Подставляя в выражение (3.2-14) значение  $\mathbf{v}_i$  из равенства (3.2-12), получаем следующее выражение для кинетической энергии элемента массой  $dm$ :

$$\begin{aligned} dK_i &= 1/2 \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \mathbf{U}_{ip} \dot{q}_p^T \mathbf{r}_i \left[ \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ir} \dot{q}_r^T \mathbf{r}_i \right]^T \right] dm = \\ &= 1/2 \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip}^T \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_i^T \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] dm = \\ &= 1/2 \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} ({}^i\mathbf{r}_i dm {}^i\mathbf{r}_i^T) \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]. \end{aligned} \quad (8.2-15)$$

Матрица  $\mathbf{U}_{ij}$  характеризует изменение положения точки  $i$ -го звена относительно базовой системы координат, обусловленное изменением координаты  $q_j$ . Данная матрица одинакова для всех точек  $i$ -го звена и не зависит от распределения массы в этом звене. Не зависят от распределения массы также и величины  $\dot{q}_i$ . Таким образом,

$$K_i = \int dK_i = 1/2 \text{Tr} \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{ip} \left( \int {}^i\mathbf{r}_i^T dm \right) \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right]. \quad (3.2-16)$$

Интегральный член в скобках представляет собой матрицу инерции  $\mathbf{J}_i$   $i$ -го звена

$$\mathbf{J}_i = \int {}^i\mathbf{r}_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}. \quad (3.2-17)$$

Если воспользоваться тензором инерции  $\mathbf{I}_{ij}$ , по определению равным

$$\mathbf{I}_{ij} = \int \left[ \delta_{ij} \left[ \sum_k x_k^2 \right] - x_i x_j \right] dm,$$

где индексы  $i, j, k$  принимают значение  $x, y$  или  $z$ , обозначая оси  $i$ -й системы координат, а  $\delta_{ij}$  — так называемый символ Кронекера, то матрицу  $\mathbf{J}_i$  можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix}. \quad (3.2-18)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$  — однородные координаты центра масс  $i$ -го звена в  $i$ -й системе координат. Формулу (3.2-18) можно

<sup>1)</sup>  $\text{Tr} \mathbf{A} \triangleq \sum_{i=1}^n a_{ii}$

также записать в виде

$$\mathbf{J}_i = m_i \begin{bmatrix} \frac{-k_{i11}^2 + k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i12}^2 & k_{i13}^2 & \bar{x}_i \\ k_{i12}^2 & \frac{k_{i11}^2 - k_{i22}^2 + k_{i33}^2}{2} & k_{i23}^2 & \bar{y}_i \\ k_{i13}^2 & k_{i23}^2 & \frac{k_{i11}^2 + k_{i22}^2 - k_{i33}^2}{2} & \bar{z}_i \\ \bar{x}_i & \bar{y}_i & \bar{z}_i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2-19)$$

Здесь  $K_{ijk} = I_{jk}/m_i$  и  $j, k = 1, 2, 3$ , а  ${}^i\bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$  — радиус-вектор центра масс  $i$ -го звена в системе координат  $i$ -го звена. Таким образом, полная кинетическая энергия манипулятора равна

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n K_i = 1/2 \sum_{i=1}^n Tr \left[ \sum_{\rho=1}^i \sum_{r=1}^i \mathbf{U}_{i\rho} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T \dot{q}_\rho \dot{q}_r \right] = \\ &= 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{\rho=1}^i \sum_{r=1}^i [Tr (\mathbf{U}_{i\rho} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ir}^T) \dot{q}_\rho \dot{q}_r]. \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

Отметим, что величины  $\mathbf{J}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) зависят только от распределения массы  $i$ -го звена в  $i$ -й системе координат и не зависят ни от положения, ни от скорости звеньев. Это позволяет, однажды вычислив матрицы  $\mathbf{J}_i$ , использовать полученные значения в дальнейшем для вычисления кинетической энергии манипулятора.

### 3.2.3. Потенциальная энергия манипулятора

Обозначим полную потенциальную энергию манипулятора через  $P$ , а потенциальную энергию  $i$ -го звена — через  $P_i$ . Тогда

$$P_i = -m_i \mathbf{g}^0 \bar{\mathbf{r}}_i = -m_i \mathbf{g} ({}^0\mathbf{A}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2-21)$$

Суммируя потенциальные энергии всех звеньев, получаем

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n -m_i \mathbf{g} ({}^0\mathbf{A}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i). \quad (3.2-22)$$

Здесь  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z, 0)$  — вектор-строка, описывающая гравитационное ускорение в базовой системе координат. В земной системе координат  $\mathbf{g} = (0, 0, -|g|, 0)$ , а  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли ( $g = 9,8062$  м/с<sup>2</sup>).

### 3.2.4. Уравнения движения манипулятора

Используя равенства (3.2-20) и (3.2-22), запишем выражение для функции Лагранжа

$$L = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i [Tr (\mathbf{U}_{ij} \mathbf{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T) \dot{q}_j \dot{q}_k] + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g} ({}^0\bar{\mathbf{A}}_i^T \bar{\mathbf{r}}_i). \quad (3.2-23)$$

Подставив это выражение в уравнение Лагранжа, получим выражение для обобщенной силы  $\tau_i$ , которую должен развить силовой привод  $i$ -го сочленения, чтобы реализовать заданное движение  $i$ -го звена манипулятора

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j Tr (\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \ddot{q}_k + \\ &+ \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j Tr (\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji}^T \bar{\mathbf{r}}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.2-24)$$

Выражение (3.2-24) можно представить в следующей более простой форме:

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2-25)$$

или в матричном виде

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}(\mathbf{q}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) + \mathbf{c}(\mathbf{q}(t)), \quad (3.2-26)$$

где  $\boldsymbol{\tau}(t)$  — вектор (размерностью  $n \times 1$ ) обобщенных сил, создаваемых силовыми приводами в сочленениях манипулятора:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t))^T; \quad (3.2-27)$$

$\mathbf{q}(t)$  — вектор (размерностью  $n \times 1$ ) присоединенных переменных манипулятора

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))^T; \quad (3.2-28)$$

$\dot{\mathbf{q}}(t)$  — вектор (размерностью  $n \times 1$ ) обобщенных скоростей

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t))^T; \quad (3.2-29)$$

$\ddot{\mathbf{q}}(t)$  — вектор (размерностью  $n \times 1$ ) обобщенных ускорений

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = (\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_n(t))^T; \quad (3.2-30)$$

$\mathbf{D}(\mathbf{q})$  — симметрическая матрица размерностью  $n \times n$ , элементы которой даются выражением

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n Tr (\mathbf{U}_{jk} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T), \quad i, k = 1, 2, \dots, n; \quad (3.2-31)$$

$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  — вектор (размерностью  $n \times 1$ ) кориолисовых и центробежных сил

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T,$$

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2-32)$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=ma \times (i, k, m)}^n Tr(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad i, k, m = 1, 2, \dots, n; \quad (3.2-33)$$

$\mathbf{c}(\mathbf{q})$  — вектор (размерностью  $n \times 1$ ) гравитационных сил

$$\mathbf{c}(\mathbf{q}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,$$

$$c_i = \sum_{j=i}^n (-m_j g \mathbf{U}_{ji}^T \bar{\mathbf{r}}_j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2-34)$$

### 3.2.5. Уравнения движения манипулятора с вращательными сочленениями

Конкретизация равенств (3.2-26) — (3.2-34) для шестизвеного манипулятора с вращательными сочленениями приводит к следующему виду членов уравнений, определяющих динамику движения манипулятора.

Матрица  $\mathbf{D}(\theta)$ . Исходя из равенства (3.2-31), имеем

$$\mathbf{D}(\theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{15} & D_{25} & D_{35} & D_{45} & D_{55} & D_{56} \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{46} & D_{56} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.2-35)$$

где

$$D_{11} = Tr(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + Tr(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) + Tr(\mathbf{U}_{31} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{31}^T) + Tr(\mathbf{U}_{41} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{41}^T) + Tr(\mathbf{U}_{51} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{51}^T) + Tr(\mathbf{U}_{61} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{61}^T),$$

$$D_{12} = D_{21} = Tr(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) + Tr(\mathbf{U}_{32} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{31}^T) + Tr(\mathbf{U}_{42} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{41}^T) + Tr(\mathbf{U}_{52} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{51}^T) + Tr(\mathbf{U}_{62} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{61}^T),$$

$$D_{13} = D_{31} = Tr(\mathbf{U}_{33} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{31}^T) + Tr(\mathbf{U}_{43} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{41}^T) + Tr(\mathbf{U}_{53} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{51}^T) + Tr(\mathbf{U}_{63} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{61}^T),$$

$$D_{14} = D_{41} = Tr(\mathbf{U}_{44} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{41}^T) + Tr(\mathbf{U}_{54} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{51}^T) + Tr(\mathbf{U}_{64} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{61}^T),$$

$$D_{15} = D_{51} = Tr(\mathbf{U}_{55} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{51}^T) + Tr(\mathbf{U}_{65} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{61}^T),$$

$$D_{16} = D_{61} = Tr(\mathbf{U}_{66} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{61}^T),$$

$$D_{22} = Tr(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) + Tr(\mathbf{U}_{32} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{32}^T) + Tr(\mathbf{U}_{42} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{42}^T) + Tr(\mathbf{U}_{52} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{52}^T) + Tr(\mathbf{U}_{62} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{62}^T),$$

$$D_{23} = D_{32} = Tr(\mathbf{U}_{33} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{32}^T) + Tr(\mathbf{U}_{43} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{42}^T) + Tr(\mathbf{U}_{53} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{52}^T) + Tr(\mathbf{U}_{63} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{62}^T),$$

$$D_{24} = D_{42} = Tr(\mathbf{U}_{44} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{42}^T) + Tr(\mathbf{U}_{54} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{52}^T) + Tr(\mathbf{U}_{64} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{62}^T),$$

$$D_{25} = D_{52} = Tr(\mathbf{U}_{55} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{52}^T) + Tr(\mathbf{U}_{65} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{62}^T),$$

$$D_{26} = D_{62} = Tr(\mathbf{U}_{66} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{62}^T),$$

$$D_{33} = Tr(\mathbf{U}_{33} \mathbf{J}_3 \mathbf{U}_{33}^T) + Tr(\mathbf{U}_{43} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{43}^T) + Tr(\mathbf{U}_{53} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{53}^T) + Tr(\mathbf{U}_{63} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{63}^T),$$

$$D_{34} = D_{43} = Tr(\mathbf{U}_{44} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{43}^T) + Tr(\mathbf{U}_{54} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{53}^T) + Tr(\mathbf{U}_{64} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{63}^T),$$

$$D_{35} = D_{53} = Tr(\mathbf{U}_{55} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{53}^T) + Tr(\mathbf{U}_{65} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{63}^T),$$

$$D_{36} = D_{63} = Tr(\mathbf{U}_{66} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{63}^T),$$

$$D_{44} = Tr(\mathbf{U}_{44} \mathbf{J}_4 \mathbf{U}_{44}^T) + Tr(\mathbf{U}_{54} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{54}^T) + Tr(\mathbf{U}_{64} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{64}^T),$$

$$D_{45} = D_{54} = Tr(\mathbf{U}_{55} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{54}^T) + Tr(\mathbf{U}_{65} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{64}^T),$$

$$D_{46} = D_{64} = Tr(\mathbf{U}_{66} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{64}^T),$$

$$D_{55} = Tr(\mathbf{U}_{55} \mathbf{J}_5 \mathbf{U}_{55}^T) + Tr(\mathbf{U}_{65} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{65}^T),$$

$$D_{56} = D_{65} = Tr(\mathbf{U}_{66} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{65}^T),$$

$$D_{66} = Tr(\mathbf{U}_{66} \mathbf{J}_6 \mathbf{U}_{66}^T).$$

Вектор  $\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta})$ . Коэффициенты при обобщенных скоростях в выражениях (3.2-32), (3.2-33) для центробежных и кориолисовых сил можно сгруппировать в матрицы  $\mathbf{H}_{i, \nu}$  следующего вида:

$$\mathbf{H}_{i, \nu} = \begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} & h_{i14} & h_{i15} & h_{i16} \\ h_{i12} & h_{i22} & h_{i23} & h_{i24} & h_{i25} & h_{i26} \\ h_{i13} & h_{i23} & h_{i33} & h_{i34} & h_{i35} & h_{i36} \\ h_{i14} & h_{i24} & h_{i34} & h_{i44} & h_{i45} & h_{i46} \\ h_{i15} & h_{i25} & h_{i35} & h_{i45} & h_{i55} & h_{i56} \\ h_{i16} & h_{i26} & h_{i36} & h_{i46} & h_{i56} & h_{i66} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.2-36)$$

Пусть скорости изменения всех шести присоединенных переменных манипулятора характеризуются вектором  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta}(t) = [\dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t), \dots, \dot{\theta}_6(t)]. \quad (3.2-37)$$



С учетом (3.2-36) и (3.2-37) равенство (2.2-32) можно представить в виде следующего произведения матриц и векторов:

$$h_i = \dot{\theta}^T \mathbf{H}_i \mathbf{v} \dot{\theta}. \quad (3.2-38)$$

Здесь индекс  $i$  указывает номер сочленения ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), в котором измеряются моменты и силы центробежного и кориолисового типа. Рассматривая (3.2-38) как выражение для компоненты шестимерного вектора  $\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta})$ , можем написать

$$\mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \mathbf{H}_3 \mathbf{v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \mathbf{H}_4 \mathbf{v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \mathbf{H}_5 \mathbf{v} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \mathbf{H}_6 \mathbf{v} \dot{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.2-39)$$

**Вектор гравитационных сил  $\mathbf{c}(\theta)$ .** Из равенства (3.2-34) имеем

$$\mathbf{c}(\theta) = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)^T, \quad (3.2-40)$$

где

$$c_1 = -(m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{11}^1 \bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{21}^2 \bar{\mathbf{r}}_2 + m_3 \mathbf{g} \mathbf{U}_{31}^3 \bar{\mathbf{r}}_3 + m_4 \mathbf{g} \mathbf{U}_{41}^4 \bar{\mathbf{r}}_4 + m_5 \mathbf{g} \mathbf{U}_{51}^5 \bar{\mathbf{r}}_5 + m_6 \mathbf{g} \mathbf{U}_{61}^6 \bar{\mathbf{r}}_6),$$

$$c_2 = -(m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{22}^2 \bar{\mathbf{r}}_2 + m_3 \mathbf{g} \mathbf{U}_{32}^3 \bar{\mathbf{r}}_3 + m_4 \mathbf{g} \mathbf{U}_{42}^4 \bar{\mathbf{r}}_4 + m_5 \mathbf{g} \mathbf{U}_{52}^5 \bar{\mathbf{r}}_5 + m_6 \mathbf{g} \mathbf{U}_{62}^6 \bar{\mathbf{r}}_6),$$

$$c_3 = -(m_3 \mathbf{g} \mathbf{U}_{33}^3 \bar{\mathbf{r}}_3 + m_4 \mathbf{g} \mathbf{U}_{43}^4 \bar{\mathbf{r}}_4 + m_5 \mathbf{g} \mathbf{U}_{53}^5 \bar{\mathbf{r}}_5 + m_6 \mathbf{g} \mathbf{U}_{63}^6 \bar{\mathbf{r}}_6),$$

$$c_4 = -(m_4 \mathbf{g} \mathbf{U}_{44}^4 \bar{\mathbf{r}}_4 + m_5 \mathbf{g} \mathbf{U}_{54}^5 \bar{\mathbf{r}}_5 + m_6 \mathbf{g} \mathbf{U}_{64}^6 \bar{\mathbf{r}}_6),$$

$$c_5 = -(m_5 \mathbf{g} \mathbf{U}_{55}^5 \bar{\mathbf{r}}_5 + m_6 \mathbf{g} \mathbf{U}_{65}^6 \bar{\mathbf{r}}_6),$$

$$c_6 = -m_6 \mathbf{g} \mathbf{U}_{66}^6 \bar{\mathbf{r}}_6.$$

Коэффициенты  $c_i$ ,  $D_{ik}$  и  $h_{ikm}$  в выражениях (3.2-31) — (3.2-34) являются функциями как присоединенных переменных, так и динамических параметров манипулятора. Их часто называют динамическими коэффициентами манипулятора. Физический смысл динамических коэффициентов легко понять из уравнений (3.2-26) — (3.2-34), описывающих динамику движения манипулятора.

1. Коэффициенты  $c_i$ , определяемые равенством (3.2-34), учитывают силу тяжести, действующую на каждое из звеньев манипулятора.

2. Коэффициенты  $D_{ik}$ , определяемые равенством (3.2-31), устанавливают связь действующих в сочленениях сил и моментов с ускорениями присоединенных переменных. В частности, при  $i = k$  коэффициент  $D_{ii}$  связывает момент  $\tau_i$ , действующий в  $i$ -м сочленении, с ускорением  $\dot{\theta}_i$  присоединенной переменной. Если  $i \neq k$ , то  $D_{ik}$  определяет момент (или силу), возникающий в  $i$ -м сочленении под действием ускорения в  $k$ -м сочленении.

Поскольку матрица инерции симметрична и  $Tr(\mathbf{A}) = Tr(\mathbf{A}^T)$ , можно показать, что  $D_{ik} = D_{ki}$ .

3. Коэффициенты  $h_{ikm}$ , определяемые равенствами (3.2-32) и (3.2-33), устанавливают связь действующих в сочленениях сил и моментов со скоростями изменения присоединенных переменных. Коэффициент  $h_{ikm}$  определяет связь момента, возникающего в  $i$ -м сочленении в результате движения в  $k$ -м и  $m$ -м сочленениях, со скоростями изменения  $k$ -й и  $m$ -й присоединенных переменных. В частности, при  $k = m$  коэффициент  $h_{ikk}$  связывает угловую скорость в  $k$ -м сочленении с порождаемой ею центробежной силой, «ощущаемой» в  $i$ -м сочленении. Если  $k = m$ , то  $h_{ikm}$  связывает кориолисову силу, возникающую в  $i$ -м сочленении, со скоростями изменения  $k$ -й и  $m$ -й присоединенных переменных, в результате которого эта сила возникает. Отметим, что в соответствии с физическим смыслом  $h_{ikm} = h_{imk}$ .

При вычислении рассмотренных коэффициентов полезно знать, что некоторые из них могут иметь нулевые значения по одной из следующих причин:

1. Конкретная кинематическая схема манипулятора может исключать динамическое взаимовлияние движений в некоторых парах сочленений (коэффициенты  $D_{ij}$ ,  $h_{ikm}$ ).

2. Некоторые из коэффициентов  $h_{ikm}$  присутствуют в формулах (2.2-32) и (3.2-33) чисто фиктивно, будучи нулевыми в соответствии с физическим смыслом. Так, например, коэффициент  $h_{iii}$  всегда равен 0, поскольку центробежная сила, порождаемая движением в  $i$ -м сочленении, на само  $i$ -е сочленение влияния не оказывает, хотя и влияет на другие сочленения, т. е.  $h_{jii} \neq 0$  при  $j \neq i$ .

3. Некоторые из динамических коэффициентов могут принимать нулевые значения в отдельные моменты времени при реализации определенных конфигураций манипулятора.

Уравнения движения манипулятора (3.2-26) — (3.2-34) представляют собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти уравнения учитывают все действующие на звенья манипулятора силы и моменты: инерциальные, центробежные, кориолисовы и гравитационные. При заданных в виде функций времени моментах (силах)  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) одновременным интегрированием всех входящих в (3.2-26) уравнений можно получить описание реального дви-

жения манипулятора в форме зависимостей от времени присоединенных переменных  $q(t)$ . Далее, используя соответствующие матрицы преобразования однородных координат, по известной вектор-функции  $q(t)$  можно определить зависимость от времени положения схвата манипулятора (траекторию схвата). Или если с помощью программы выбора траектории получены в форме заданных функций времени законы изменения присоединенных переменных, их скоростей и ускорений, то с помощью равенств (3.2-26) — (3.2-34) можно определить зависимость от времени  $\tau(t)$  моментов, которые должны быть созданы в сочленениях для реализации выбранной траектории движения манипулятора. В этом случае мы будем иметь дело с задачей программного управления. Однако для автономных робототехнических систем более предпочтительным является управление с обратной связью. Этот вопрос рассмотрен в гл. 5.

Вследствие матричной структуры уравнения Лагранжа — Эйлера в задачах управления с обратной связью, где они используются для описания состояния управляемой системы, применяются в форме (3.2-26). Такая форма допускает выбор закона управления, устраняющего все нелинейные эффекты. Достаточно часто при разработке замкнутой системы управления манипулятора динамические коэффициенты выбираются таким об-

Таблица 3.1. Вычислительные затраты на реализацию уравнений движения в форме Лагранжа — Эйлера<sup>1)</sup>

Составляющие уравнений движения	Число операций умножения	Число операций сложения
${}^i A_i$	$32n(n-1)$	$24n(n-1)$
$-m_j g U_{ji} {}^j \bar{r}_j$	$4n(9n-7)$	$n \frac{51n-45}{2}$
$\sum_{j=i}^n m_j g U_{ji} {}^j \bar{r}_j$	0	$1/2n(n-1)$
$Tr[U_{kj} J_k (U_{ki})^T]$	$(128/3)n(n+1)(n+2)$	$(65/2)n(n+1)(n+2)$
$\sum_{k=\max(i,j)}^n Tr[U_{kj} J_k (U_{ki})^T]$	0	$(1/6)n(n-1)(n+1)$
$Tr[U_{mj} J_m (U_{mi})^T]$	$(128/3)n^2(n+1)(n+2)$	$(65/2)n^2(n+1)(n+2)$
$\sum_{m=\max(i,j,k)}^n Tr[U_{mj} J_m (U_{mi})^T]$	0	$(1/6)n^2(n-1)(n+1)$
$\tau = D(g)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + c(q)$	$(128/3)n^4 + (512/3)n^3 + (844/3)n^2 + (76/3)n$	$(98/3)n^4 + (781/6)n^3 + (637/3)n^2 + (107/6)n$

<sup>1)</sup>  $n$  — число степеней свободы манипулятора.

разом, чтобы минимизировать нелинейные эффекты, связанные с кориолисовыми и центробежными силами [188].

Представляют интерес оценки вычислительных затрат на определение коэффициентов по формулам (3.2-31) — (3.2-34). В табл. 3.1 приведены данные о вычислительной сложности уравнений движения в форме Лагранжа — Эйлера. В ней приведено число математических операций (умножений и сложений), необходимое на каждом шаге интегрирования уравнений (3.2-26). С вычислительной точки зрения эти уравнения чрезвычайно неэффективны по сравнению с другими способами описания динамики манипулятора, один из которых рассмотрен в следующем разделе.

### 3.2.6. Пример: двухзвенный манипулятор

Применение уравнений Лагранжа — Эйлера в форме (3.2-26) — (3.2-34) для описания динамики движения манипулятора проиллюстрируем в этом разделе на примере двухзвенного манипулятора с вращательными сочленениями (рис. 3.2). Все

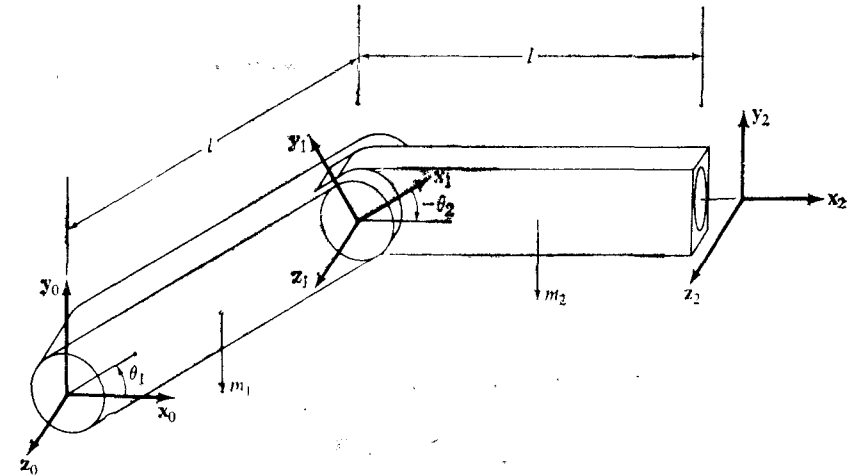


Рис. 3.2. Двухзвенный манипулятор.

оси сочленений рассматриваемого манипулятора параллельны оси  $z$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Физические характеристики, такие, как положение центра масс, масса каждого звена и выбранные системы координат, указаны ниже. Требуется получить уравнения движения рассматриваемого двухзвенного манипулятора, основываясь на равенствах (3.2-26) — (3.2-34).

Относительно рассматриваемого манипулятора будем предполагать следующее:

- присоединенными переменными являются углы  $\theta_1, \theta_2$ ;
- первое и второе звенья имеют соответственно массы  $m_1$  и  $m_2$ ;
- параметры звеньев имеют значения  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, d_1 = d_2 = 0, a_1 = a_2 = l$ . В соответствии с рис. 3.2 и полученными в предыдущих разделах соотношениями для матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$  ( $i = 1, 2$ ) имеем

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $C_i = \cos \theta_i$ ;  $S_i = \sin \theta_i$ ;  $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ;  $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ . В соответствии с определением матрицы  $\mathbf{Q}_i$  для вращательного сочленения имеем

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя выражение (3.2-11), получаем

$$\mathbf{U}_{11} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_1}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично для  $\mathbf{U}_{21}$  и  $\mathbf{U}_{22}$  получаем

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \mathbf{Q}_1 {}^0\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l(S_{12} + S_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial {}^0\mathbf{A}_2}{\partial \theta_2} = {}^0\mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_2 {}^1\mathbf{A}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & lC_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & lS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из равенства (3.2-18) в предположении о равенстве нулю всех центробежных моментов инерции получаем формулу для матрицы псевдоинерции  $\mathbf{J}_i$ :

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 & 0 & 0 & -1/2m_1l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_1l & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (3.2-31), получаем

$$D_{11} = T_2(\mathbf{U}_{11}\mathbf{J}_1\mathbf{U}_{11}^T) + T_2(\mathbf{U}_{21}\mathbf{J}_2\mathbf{U}_{21}^T) =$$

$$= T_2 \left\{ \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 & 0 & 0 & -1/2m_1l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_1l & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_{11}^T \right\} +$$

$$+ T_2 \left\{ \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \right. \\ \left. \times \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{21}^T \right\} = 1/3m_1l^2 + 4/3m_2l^2 + m_2C_2l^2;$$

$$D_{12} = D_{21} = Tr(U_{22}J_2U_{21}^T) = \\ = Tr \left\{ \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{21}^T \right\} = \\ = m_2l^2(-1/6 + 1/2 + 1/2C_2) = 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2C_2;$$

$$D_{22} = Tr(U_{22}J_2U_{22}^T) = \\ = Tr \left\{ \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3m_2l^2 & 0 & 0 & -1/2m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{22}^T \right\} = \\ = 1/3m_2l^2S_{12}^2 + 1/3m_2l^2C_{12}^2 = 1/3m_2l^2.$$

Для определения слагаемых, описывающих центростремное и кориолисово ускорение, воспользуемся равенством (3.2-32). Для  $i = 1$  оно дает

$$h_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{1km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{111} \dot{\theta}_1^2 + h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{122} \dot{\theta}_2^2.$$

С помощью (3.2-33) можно получить значения коэффициентов  $h_{1km}$ . Подставляя их в предыдущее выражение, имеем

$$h_1 = -1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2.$$

Аналогично для  $i = 2$

$$h_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{2km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{211} \dot{\theta}_1^2 + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{221} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + h_{222} \dot{\theta}_2^2 = \\ = 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_1^2.$$

Таким образом,

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}.$$

Запишем теперь слагаемые, определяющие влияние гравитационных сил  $c = (c_1, c_2)^T$ . На основании равенства (3.2-34) имеем

$$c_1 = -(m_1gU_{11}^T\bar{r}_1 + m_2gU_{21}^T\bar{r}_2) = \\ = -m_1(0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -lS_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & lC_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \\ -m_2(0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l(S_{12} + S_1) \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l(C_{12} + C_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = 1/2m_1glC_1 + 1/2m_2glC_{12} + m_2glC_1;$$

$$c_2 = -m_2gU_{22}^T\bar{r}_2 = \\ = -m_2(0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -lS_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & lC_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ = -m_2(1/2glC_{12} - glC_{12}).$$

Таким образом, нами получен вектор, определяющий влияние силы тяжести:

$$c(\theta) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2m_1glC_1 + 1/2m_2glC_{12} + m_2glC_1 \\ 1/2m_2glC_{12} \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем следующие уравнения, описывающие динамику движения рассмотренного двухзвенного манипулятора:

$$\tau(t) = D(\theta)\ddot{\theta}(t) + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta), \\ \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 + 4/3m_2l^2 + m_2C_2l^2 & 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2C_2 \\ 1/3m_2l^2 + 1/2m_2l^2C_2 & 1/3m_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 1/2m_1glC_1 + 1/2m_2glC_{12} + m_2glC_1 \\ 1/2m_2glC_{12} \end{bmatrix}.$$

### 3.3. УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА — ЭЙЛЕРА

В предыдущем разделе с помощью уравнений Лагранжа — Эйлера мы получили систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую динамику движения манипулятора. Применение полученных уравнений для расчета сил и моментов, которые должны быть созданы силовыми приводами в сочленениях манипулятора для реализации заданной траектории движения, с вычислительной точки зрения представляет большие трудности при решении задачи управления в реальном времени. Они обусловлены в основном неэффективностью в вычислительном плане уравнений Лагранжа — Эйлера, использующих матрицы преобразования однородных координат размерностью  $4 \times 4$ . Для обеспечения управления в реальном времени была разработана упрощенная модель динамики движения манипулятора, не учитывающая кориолисовы и центробежные силы. Это позволило сократить время, необходимое для вычисления требуемых сил и моментов на каждом шаге интегрирования уравнений движения до допустимых пределов (менее 10 мс счета с применением компьютера PDP11/45). Однако при быстром движении манипулятора кориолисовы и центробежные силы оказывают существенное влияние на динамику движения. В связи с этим применение упрощенной модели динамики накладывает ограничения на скорость движения манипулятора, что нежелательно в большинстве производственных процессов. Кроме того, при быстром движении манипулятора ошибки в реализуемых силах и моментах, обусловленные неучетом центробежных и кориолисовых сил, не удается скомпенсировать за счет управления с обратной связью из-за слишком больших величин требующихся для этого корректирующих моментов.

В качестве альтернативного более эффективного в вычислительном плане способа описания динамики манипулятора некоторые исследователи воспользовались подходом, основанным на применении второго закона Ньютона. Ими были получены различные формы уравнений Ньютона — Эйлера для описания движения разомкнутой кинематической цепи [6, 223, 185, 299]. Такой подход приводит к системе прямых и обратных рекуррентных уравнений, позволяющих сократить затраты времени на вычисление заданных моментов до пределов, допускающих реализацию управления в реальном времени. Вывод этих уравнений основывается на принципе Д'Аламбера и ряде соотношений, описывающих кинематику звеньев манипулятора в базовой системе координат. Прежде чем обратиться к выводу уравнений динамики движения манипулятора, мы напомним некоторые сведения относительно подвижных систем координат.

#### 3.3.1. Вращающиеся системы координат

В этом разделе получены соотношения, устанавливающие связь между вращающейся и неподвижной инерциальной системами координат. Затем полученные соотношения распространены на подвижную систему координат, участвующую одновременно в поступательном и вращательном движениях относительно инерциальной системы. Рассмотрим две системы координат (рис. 3.3): неподвижную инерциальную систему координат  $OXYZ$  и вращающуюся систему координат  $OX^*Y^*Z^*$ . Начала этих систем совпадают и расположены в точке  $O$ , а оси  $OX^*$ ,  $OY^*$ ,  $OZ^*$  вращаются относительно осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ . Пусть  $(i, j, k)$  и  $(i^*, j^*, k^*)$  — тройки единичных векторов, направленных вдоль основных осей систем  $OXYZ$  и  $OX^*Y^*Z^*$  соответственно.

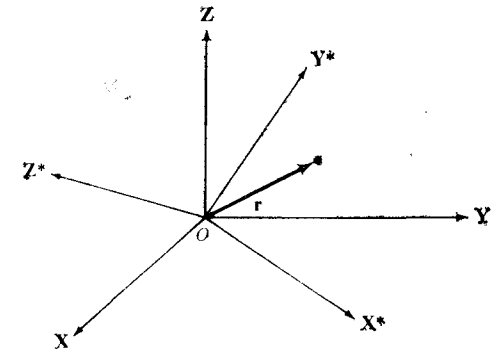


Рис. 3.3. Вращающаяся система координат.

Положение точки  $r$ , неподвижной относительно системы координат  $OX^*Y^*Z^*$ , можно описать следующими двумя способами:

$$r = xi + yj + zk, \quad (3.3-1)$$

или

$$r = x^*i^* + y^*j^* + z^*k^*. \quad (3.3-2)$$

Найдем скорость точки  $r$ . Поскольку рассматриваемые системы координат вращаются относительно друг друга, скорости точки  $r(t)$  будут различны в этих системах. В дальнейшем будем различать скорости произвольной точки в системах координат  $OXYZ$  и  $OX^*Y^*Z^*$ , используя следующие обозначения:

$$\frac{d(\cdot)}{dt} \text{ — скорость в неподвижной системе координат } OXYZ; \quad (3.3-3)$$

$$\frac{d^*(\cdot)}{dt} \text{ — скорость в подвижной вращающейся системе координат } OX^*Y^*Z^*. \quad (3.3-4)$$

Из выражения (3.3-1) получаем скорость точки  $r(t)$  в системе  $OXYZ$ :

$$\frac{dr}{dt} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k + x \frac{di}{dt} + y \frac{dj}{dt} + z \frac{dk}{dt} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k. \quad (3.3-5)$$

Дифференцируя равенство (3.3-2), получаем скорость точки  $\mathbf{r}(t)$  в системе координат  $OX^*Y^*Z^*$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} &= \dot{x}^* \mathbf{i}^* + \dot{y}^* \mathbf{j}^* + \dot{z}^* \mathbf{k}^* + x^* \frac{d^*\mathbf{i}^*}{dt} + y^* \frac{d^*\mathbf{j}^*}{dt} + z^* \frac{d^*\mathbf{k}^*}{dt} = \\ &= \dot{x}^* \mathbf{i}^* + \dot{y}^* \mathbf{j}^* + \dot{z}^* \mathbf{k}^*. \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

С учетом равенств (3.3-2) и (3.3-6) можно получить следующее выражение для скорости точки  $\mathbf{r}(t)$  в системе координат  $OXYZ$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \dot{x}^* \mathbf{i}^* + \dot{y}^* \mathbf{j}^* + \dot{z}^* \mathbf{k}^* + x^* \frac{d\mathbf{i}^*}{dt} + y^* \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} + z^* \frac{d\mathbf{k}^*}{dt} = \\ &= \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + x^* \frac{d\mathbf{i}^*}{dt} + y^* \frac{d\mathbf{j}^*}{dt} + z^* \frac{d\mathbf{k}^*}{dt}. \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

Здесь мы сталкиваемся с трудностью вычисления производных  $d\mathbf{i}^*/dt$ ,  $d\mathbf{j}^*/dt$  и  $d\mathbf{k}^*/dt$ , обусловленной тем, что векторы  $\mathbf{i}^*$ ,  $\mathbf{j}^*$ ,  $\mathbf{k}^*$  вращаются относительно векторов  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ .

Чтобы найти соотношение между скоростями точки  $r$  в неподвижной и вращающейся системах координат, предположим, что система  $OX^*Y^*Z^*$  вращается вокруг некоторой оси  $OQ$ , проходящей через точку  $O$ , с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 3.4). Угловая скорость вращения системы координат  $OX^*Y^*Z^*$  представляет собой по определению вектор длины  $\omega$ , направленный вдоль оси  $OQ$  в соответствии с правилом правой руки. Рассмотрим вектор  $\mathbf{s}$ , неподвижный относительно системы  $OX^*Y^*Z^*$ . Покажем, что скорость точки, положение которой задается вектором  $\mathbf{s}$ , в системе координат  $OXYZ$  равна

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \omega \times \mathbf{s}. \quad (3.3-8)$$

Поскольку производная вектора определяется равенством

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(t + \Delta t) - \mathbf{s}(t)}{\Delta t}, \quad (3.3-9)$$

справедливость выражения (3.3-8) можно доказать, убедившись, что

$$\omega \times \mathbf{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{s}(t + \Delta t) - \mathbf{s}(t)}{\Delta t}. \quad (3.3-10)$$

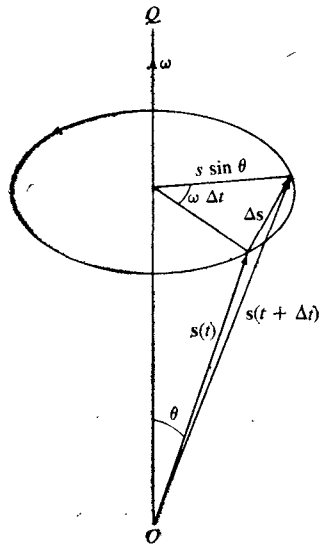


Рис. 3.4. Скорость во вращающейся системе координат.

Учитывая, что равенство векторов обеспечивается совпадением их длин и направлений, покажем, что векторы в левой и правой частях равенства (3.3-10) одинаковы по величине и их направления совпадают. Длина вектора  $\omega \times \mathbf{s}$  равна

$$|\omega \times \mathbf{s}| = \omega \cdot s \cdot \sin \theta. \quad (3.3-11)$$

Если величина  $\Delta t$  достаточно мала, то из рис. 3.4 очевидно, что

$$|\Delta \mathbf{s}| = (s \sin \theta) (\omega \Delta t). \quad (3.3-12)$$

Тем самым доказано равенство длин векторов в левой и правой частях равенства (3.3-10). В соответствии с определением векторного произведения вектор  $\omega \times \mathbf{s}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{s}$  и лежит в плоскости окружности, изображенной на рис. 3.4.

Применив формулу (3.3-8) к единичным векторам  $\mathbf{i}^*$ ,  $\mathbf{j}^*$ ,  $\mathbf{k}^*$ , из равенства (3.3-7) получаем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + x^* (\omega \times \mathbf{i}^*) + y^* (\omega \times \mathbf{j}^*) + z^* (\omega \times \mathbf{k}^*) = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}. \quad (3.3-13)$$

Это основное соотношение, определяющее связь между скоростями одной и той же точки во вращающейся и неподвижной системах координат. Продифференцировав левую и правую части равенства (3.3-13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} \right] + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} = \\ &= \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} + \omega \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \left[ \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r} \right] + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} = \\ &= \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.3-14)$$

Равенство (3.3-14) представляет собой теорему Кориолиса. Первое слагаемое в правой части этого равенства представляет собой ускорение рассматриваемой точки в системе  $OX^*Y^*Z^*$ . Второе слагаемое описывает кориолисово ускорение. Третье слагаемое есть центростремительное ускорение, направленное к оси вращения и перпендикулярное ей. Четвертое слагаемое исчезает при постоянной угловой скорости.

### 3.3.2. Подвижные системы координат

В этом разделе мы рассмотрим подвижные системы координат, которые могут участвовать как во вращательном, так и в поступательном движениях относительно некоторой неподвижной инерциальной системы координат. На рис. 3.5 изображена подвижная система координат  $O^*X^*Y^*Z^*$ , которая совершает вращательное и поступательное движения относительно инерциальной системы координат  $OXYZ$ . Положение материальной

точки  $p$ , обладающей массой  $m$ , относительно систем координат  $OXYZ$  и  $O^*X^*Y^*Z^*$  задается векторами  $r$  и  $r^*$  соответственно. Положение точки  $O^*$  в системе координат  $OXYZ$  определяется вектором  $h$ . Соотношение между векторами  $r$  и  $r^*$  дается выражением (см. рис. 3.5)

$$r = r^* + h. \quad (3.3-15)$$

Если система координат  $O^*X^*Y^*Z^*$  движется относительно системы  $OXYZ$ , то

$$v(t) \triangleq \frac{dr}{dt} = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = v^* + v_h. \quad (3.3-16)$$

где  $v^*$  и  $v$  — скорости точки  $p$  в системах координат  $O^*X^*Y^*Z^*$  и  $OXYZ$  соответственно, а  $v_h$  — скорость подвижной системы ко-

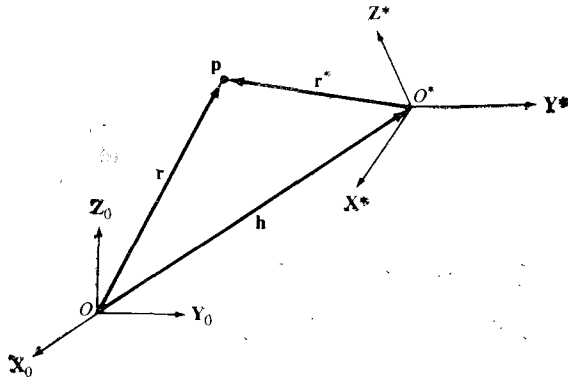


Рис. 3.5. Подвижная система координат.

ординат <sup>1)</sup>  $O^*X^*Y^*Z^*$  в инерциальной системе координат  $OXYZ$ . С учетом равенства (3.3-13) выражение (3.3-16) можно представить в виде

$$v(t) = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = \frac{d^*r^*}{dt} + \omega \times r^* + \frac{dh}{dt}. \quad (3.3-17)$$

Аналогично ускорение точки  $p$  относительно системы координат  $OXYZ$  можно представить в виде

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r^*}{dt^2} + \frac{d^2h}{dt^2} = a^* + a_h, \quad (3.3-18)$$

где  $a^*$  и  $a$  — ускорения точки  $p$  в системах координат  $O^*X^*Y^*Z^*$  и  $OXYZ$  соответственно, а  $a_h$  — ускорение системы координат

$O^*X^*Y^*Z^*$  в инерциальной системе координат  $OXYZ$ . С учетом (3.3-14) равенство (3.3-18) можно представить в виде

$$a(t) = \frac{d^2r^*}{dt^2} + 2\omega \times \frac{dr^*}{dt} + \omega \times (\omega \times r^*) + \frac{d\omega}{dt} \times r^* + \frac{d^2h}{dt^2}. \quad (3.3-19)$$

Полученные соотношения для подвижных систем координат мы в дальнейшем применим к системам координат звеньев манипулятора, определенным нами в главе, посвященной кинематике манипулятора. Уравнения движения выведем, применяя к таким подвижным системам координат принцип Д'Аламбера.

### 3.3.3. Кинематика звеньев

В этом разделе мы выведем уравнения, основывающиеся на полученных выше соотношениях для подвижной системы координат и описывающие кинематику звеньев манипулятора в базовой системе координат.

Напомним, что ортонормированная система координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  связана с осью  $i$ -го сочленения (рис. 3.6). Системы координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  и  $(x_i, y_i, z_i)$  связаны с  $(i-1)$ - и  $i$ -м звеньями и имеют начала в точках  $O^*$  и  $O'$  соответственно. Положение точек  $O'$  и  $O^*$  в базовой системе координат определяется векторами  $p_i$  и  $p_{i-1}$  соответственно. Относительное положение точек  $O'$  и  $O^*$  характеризуется в базовой системе координат вектором  $p_i^* = p_i - p_{i-1}$ .

Предположим, что система координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  имеет относительно базовой системы координат  $(x_0, y_0, z_0)$  линейную скорость  $v_{i-1}$  и угловую скорость  $\omega_{i-1}$ . Пусть  $\omega_i$  и  $\omega_i^*$  — угловые скорости точки  $O'$  в системах координат  $(x_0, y_0, z_0)$  и  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  соответственно. Тогда линейная скорость  $v_i$  и угловая скорость  $\omega_i$  системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$  относительно базовой системы координат с учетом равенства (3.3-17) определяются выражениями

$$v_i = \frac{d^*p_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times p_i^* + v_{i-1}, \quad (3.3-20)$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_i^*, \quad (3.3-21)$$

где  $d^*(\ )/dt$  означает скорость в движущейся системе координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ . Линейное ускорение  $v_i$  и угловое ускорение  $\omega_i$  системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$  относительно базовой системы координат с учетом равенства (3.3-19) определяются выраже-

<sup>1)</sup> Имеется в виду скорость точки  $O^*$ . — Прим. перев.

НИЯМИ

$$\dot{U}_i = \frac{d^2 p_i^*}{dt^2} + \dot{\omega}_{i-1} \times p_i^* + 2\omega_{i-1} \times \frac{d^* p_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times (\omega_{i-1} \times p_i^*) + \dot{U}_{i-1}, \quad (3.3-22)$$

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \dot{\omega}_i^*. \quad (3.3-23)$$

Пользуясь равенством (3.3-13), находим угловое ускорение системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$  относительно системы координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ :

$$\dot{\omega}_i^* = \frac{d^* \omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^*. \quad (3.3-24)$$

В результате равенство (3.3-23) можно представить в следующем виде:

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{i-1} + \frac{d^* \omega_i^*}{dt} + \omega_{i-1} \times \omega_i^*. \quad (3.3-25)$$

Как уже говорилось, системы координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$  и  $(x_i, y_i, z_i)$  в соответствии с алгоритмом формирования систем координат звеньев манипулятора связаны с  $(i-1)$ -м и  $i$ -м звеньями соответственно. Если  $i$ -е сочленение — поступательное, то  $i$ -е звено совершает поступательное движение вдоль оси  $z_{i-1}$  со скоростью  $\dot{q}_i$  относительно  $(i-1)$ -го звена. Если  $i$ -е сочленение — вращательное, то  $i$ -е звено вращается вокруг оси  $z_{i-1}$  с угловой скоростью  $\omega_i^*$  относительно  $(i-1)$ -го звена. Таким образом,

$$\omega_i^* = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ 0, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-26)$$

Здесь  $\dot{q}_i$  — величина угловой скорости вращения  $i$ -го звена относительно системы координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ . Аналогично

$$\frac{d^* \omega_i^*}{dt} = \begin{cases} z_{i-1} \ddot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ 0, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-27)$$

С учетом равенств (3.3-26) и (3.3-27) формулы (3.3-21) и (3.3-25) могут быть представлены в следующем виде:

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ \omega_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases} \quad (3.3-28)$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1} \ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i), & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ \dot{\omega}_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-29)$$

С учетом равенства (3.3-8) линейная скорость и ускорение  $i$ -го звена относительно  $(i-1)$ -го можно представить в следующем виде:

$$\frac{d p_i^*}{dt} = \begin{cases} \omega_i^* \times p_i^*, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-30)$$

$$\frac{d^2 p_i^*}{dt^2} = \begin{cases} \frac{d^* \omega_i^*}{dt} \times p_i^* + \omega_i^* \times (\omega_i^* \times p_i^*), & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ z_{i-1} \ddot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-31)$$

Используя равенства (3.3-30) и (3.3-21), выражение (3.3-20) для линейной скорости  $i$ -го звена относительно базовой системы координат можно представить в виде

$$v_i = \begin{cases} \omega_i \times p_i^* + v_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ z_{i-1} \dot{q}_i + \omega_i \times p_i^* + v_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-32)$$

С учетом следующих свойств векторного произведения:

$$(a \times b) \times c = b(a \cdot c) - a(b \cdot c), \quad (3.3-33)$$

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) \quad (3.3-34)$$

и равенств (3.3-26) — (3.3-31); выражение (3.3-22) для линейного ускорения звена  $i$  относительно базовой системы координат преобразуется к виду

$$\dot{v}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i \times p_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + \dot{v}_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ z_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\omega}_i \times p_i^* + 2\omega_i \times (z_{i-1} \dot{q}_i) + \omega_i \times (\omega_i \times p_i^*) + \dot{v}_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-35)$$

Заметим, что  $\omega_i = \omega_{i-1}$ , если  $i$ -е сочленение — поступательное. Равенства (3.3-28), (3.3-29), (3.3-32) и (3.3-35), описывающие кинематику движения  $i$ -го звена, потребуются нам при выводе уравнений динамики манипулятора.

### 3.3.4. Рекуррентные уравнения динамики манипулятора

Основываясь на полученных выше кинематических соотношениях, в этом разделе мы воспользуемся принципом Д'Аламбера для вывода уравнений динамики движения манипулятора.



Принцип Д'Аламбера позволяет применить известные условия статического равновесия к задачам динамики за счет рассмотрения (наряду с внешними действующими на механическую систему силами) сил инерции, препятствующих движению. Принцип Д'Аламбера выполняется для механической системы в любой момент времени. По сути это несколько модифицированный второй закон Ньютона, формулируемый следующим образом:

*Алгебраическая сумма внешних сил и сил инерции, действующих на тело в любом направлении, равна нулю.*

Рассмотрим  $i$ -е звено (рис. 3.7). Пусть точка  $O'$  совпадает с центром масс этого звена. Устанавливая соответствие между рис. 3.6 и 3.7, введем следующие обозначения (все векторы заданы в базовой системе координат):

- $\underline{m}_i$  — масса  $i$ -го звена;
- $\underline{r}_i$  — положение центра масс  $i$ -го звена в базовой системе координат;
- $\underline{s}_i$  — положение центра масс  $i$ -го звена относительно начала системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$ ;
- $\underline{p}_i^*$  — положение начала  $i$ -й системы координат относительно начала  $(i-1)$ -й системы координат;
- $\underline{\dot{v}}_i = \frac{d\underline{\dot{r}}_i}{dt}$  — линейная скорость центра масс  $i$ -го звена;
- $\underline{a}_i = d\underline{\dot{v}}_i/dt$  — линейное ускорение центра масс  $i$ -го звена;
- $\underline{F}_i$  — суммарная внешняя сила, приложенная к центру масс  $i$ -го звена;
- $\underline{N}_i$  — суммарный момент внешних сил, приложенных к  $i$ -му звену;
- $\underline{I}_i$  — матрица инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс в базовой системе координат  $(x_0, y_0, z_0)$ ;
- $\underline{f}_i$  — сила, с которой  $(i-1)$ -е звено действует на  $i$ -е звено в системе координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ ;
- $\underline{n}_i$  — момент, вызванный действием  $(i-1)$ -го звена на  $i$ -е звено в системе координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ .

Пренебрегая силами трения в сочленениях, получаем, применив принцип Д'Аламбера к  $i$ -му звену:

$$\underline{F}_i = \frac{d(m_i \underline{\dot{v}}_i)}{dt} = m_i \underline{\dot{a}}_i, \quad (3.3-36)$$

$$\underline{N}_i = \frac{d(\underline{I}_i \underline{\omega}_i)}{dt} = \underline{I}_i \underline{\dot{\omega}}_i + \underline{\omega}_i \times (\underline{I}_i \underline{\omega}_i), \quad (3.3-37)$$

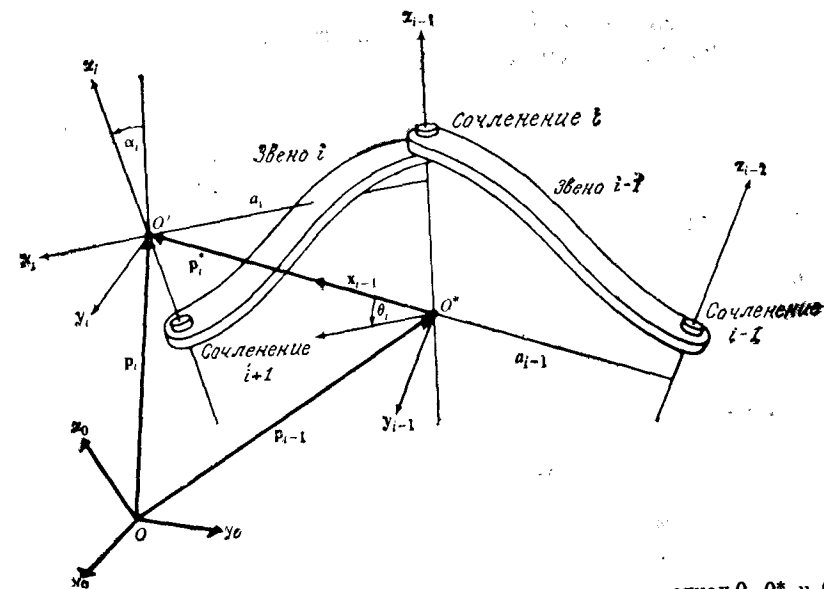


Рис. 3.6. Взаимосвязь систем координат, имеющих начала в точках  $O, O^*$  и  $O'$ .

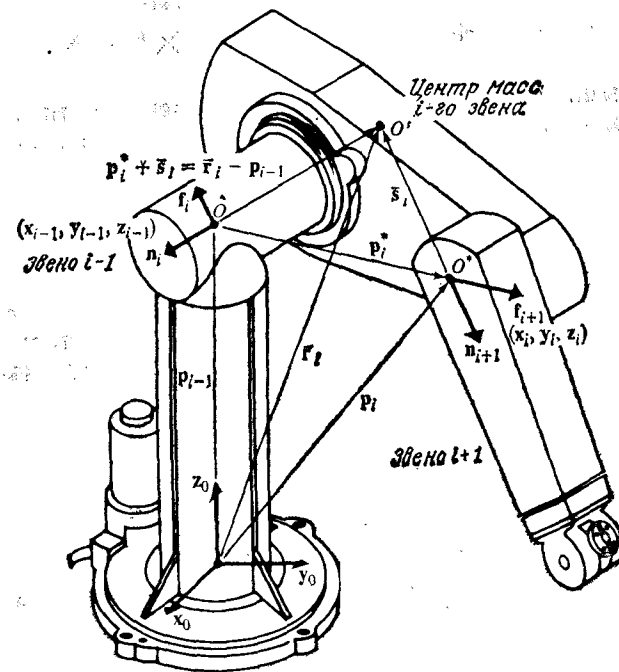


Рис. 3.7. Силы и моменты, действующие на  $i$ -е звено.

Входящие в эти формулы линейные скорость и ускорение центра масс  $i$ -го звена в соответствии с равенствами (3.3-32) и (3.3-35) определяются выражениями<sup>1)</sup>

$$\bar{\mathbf{v}}_i = \omega_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \mathbf{v}_i, \quad (3.3-38)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \dot{\omega}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \bar{\mathbf{s}}_i) + \dot{\mathbf{v}}_i. \quad (3.3-39)$$

Суммарные сила  $\mathbf{F}_i$  и момент  $\mathbf{N}_i$ , приложенные к  $i$ -му звену, обусловлены действием на него силы тяжести, а также сил со стороны соседних  $(i-1)$ -го и  $(i+1)$ -го звеньев. Таким образом,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i+1}, \quad (3.3-40)$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{p}_{i-1} - \bar{\mathbf{r}}_i) \times \mathbf{f}_i - (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{r}}_i) \times \mathbf{f}_{i+1} = \quad (3.3-41)$$

$$= \mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i+1} + (\mathbf{p}_{i-1} - \bar{\mathbf{r}}_i) \times \mathbf{F}_i - \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1}. \quad (3.3-42)$$

Эти уравнения можно представить в рекуррентной форме, воспользовавшись тем, что

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1} = m_i \bar{\mathbf{a}}_i + \mathbf{f}_{i+1}, \quad (3.3-43)$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1} + (\mathbf{p}_i^* + \bar{\mathbf{s}}_i) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i. \quad (3.3-44)$$

Полученными уравнениями, имеющими рекуррентную форму, можно пользоваться для вычисления сил и моментов  $(\mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), действующих на звенья  $n$ -звенного манипулятора. Для этого достаточно учесть, что  $\mathbf{f}_{n+1}$  и  $\mathbf{n}_{n+1}$  представляют собой соответственно силу и момент, с которыми объект манипулирования действует на схват манипулятора.

Из приведенного в гл. 2 алгоритма формирования систем координат звеньев и кинематических соотношений для соседних звеньев следует, что если  $i$ -е сочленение — вращательное, оно реализует поворот на  $q_i$  радиан в системе координат  $(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$  вокруг оси  $\mathbf{z}_{i-1}$ . Поэтому момент, создаваемый приводом  $i$ -го сочленения, должен быть равен сумме проекции момента  $\mathbf{n}_i$  на ось  $\mathbf{z}_{i-1}$  и момента вязкого трения в  $i$ -м сочленении. Если же  $i$ -е сочленение — поступательное, оно реализует смещение на  $q_i$  единиц длины относительно системы координат  $(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$  вдоль оси  $\mathbf{z}_{i-1}$ . В этом случае сила  $\tau_i$ , создаваемая в этом сочленении, должна быть равна в системе координат  $(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{z}_{i-1})$  сумме проекции силы  $\mathbf{f}_i$  на ось  $\mathbf{z}_{i-1}$  и силы вязкого трения. Таким образом, момент (сила)  $\tau_i$ , создаваемый приводом  $i$ -го

сочленения, определяется формулой

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{n}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное.} \\ \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное,} \end{cases} \quad (3.3-45)$$

где  $b_i$  — коэффициент вязкого трения в  $i$ -м сочленении.

Если основание манипулятора закреплено на платформе и 0-е звено неподвижно, то  $\omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$ , и с учетом силы тяжести

$$\dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}, \quad \text{где } |g| = 9,8062 \text{ м/с}^2. \quad (3.3-46)$$

В заключение отметим, что уравнения Ньютона — Эйлера, описывающие движение манипулятора, представляют собой си-

Таблица 3.2. Рекуррентные уравнения движения в форме Ньютона — Эйлера

Прямые уравнения:  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ \omega_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1} \ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1} \dot{q}_i), & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ \dot{\omega}_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ z_{i-1} \ddot{q}_i + \dot{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* + 2\omega_i \times (z_{i-1} \dot{q}_i) + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{p}_i^*) + \dot{\mathbf{v}}_{i-1}, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \dot{\omega}_i \times \bar{\mathbf{s}}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \bar{\mathbf{s}}_i) + \dot{\mathbf{v}}_i.$$

Обратные уравнения:  $i = n, n-1, \dots, 1$

$$\mathbf{F}_i = m_i \bar{\mathbf{a}}_i,$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{I}_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (\mathbf{I}_i \omega_i),$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_{i+1}$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{p}_i^* \times \mathbf{f}_{i+1} + (\mathbf{p}_i^* + \bar{\mathbf{s}}_i) \times \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i,$$

$$\tau_i = \begin{cases} \mathbf{n}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное,} \\ \mathbf{f}_i^T \mathbf{z}_{i-1} + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное,} \end{cases}$$

где  $b^i$  — коэффициент вязкого трения в  $i$ -м сочленении.

Обычно начальные условия с учетом действия силы тяжести имеют следующий вид:  $\omega_0 = \dot{\omega}_0 = \mathbf{v}_0 = 0$ ;  $\mathbf{v}_0 = (g_x, g_y, g_z)^T$ , причем  $|g| = 9,8062 \text{ м/с}^2$

<sup>1)</sup> Здесь  $(x_i, y_i, z_i)$  — подвижная система координат.

стему прямых и обратных рекуррентных уравнений (уравнения (3.3-28), (3.3-29), (3.3-35), (3.3-39) и (3.3-43) — (3.3-45)). Все они представлены в табл. 3.2. Прямые уравнения позволяют вычислять линейные и угловые скорости и ускорения каждого звена рекуррентным образом в направлении от базовой системы координат к схвату. Обратные уравнения служат для вычисления сил и моментов, которое производится рекуррентным образом в направлении от схвата к основанию. Таким образом, прямые уравнения обеспечивают последовательное в направлении от основания к схвату вычисление параметров движения звеньев манипулятора, в то время как обратные уравнения позволяют вычислять моменты и силы, которые должны быть реализованы в сочленениях манипулятора, последовательно в направлении от схвата к основанию.

### 3.3.5. Рекуррентные уравнения движения звена в системе координат, связанной с этим звеном

Результаты предыдущего раздела показывают, что динамика движения манипулятора может быть описана системой прямых и обратных рекуррентных уравнений, поочередно применяемой ко всем звеньям манипулятора. Прямые уравнения позволяют последовательно от основания к схвату вычислить кинематические характеристики движения звеньев, такие, как угловая скорость и ускорение, линейное ускорение. При помощи обратных уравнений последовательно от схвата к основанию вычисляются силы, действующие на звенья, а также моменты, которые должны быть созданы силовыми приводами для реализации заданной траектории движения.

Недостаток полученных рекуррентных уравнений движения состоит в том, что матрица  $\mathbf{I}_i$ , а также геометрические параметры  $(\bar{\mathbf{r}}_i, \bar{\mathbf{s}}_i, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i^*)$ , будучи выраженными относительно базовой системы координат, меняются в процессе движения манипулятора. Лу и др. [185] усовершенствовали рассматриваемый метод, перейдя в уравнениях движения к скоростям, ускорениям, матрицам инерции, векторам положения центров масс звеньев, силам и моментам, выраженным относительно систем координат соответствующих звеньев. Это позволило сильно упростить вычисления. Особенно важно, что время вычисления управляющих моментов при использовании указанным образом модифицированных уравнений движения линейно пропорционально числу сочленений и не зависит от реализующейся в процессе движения конфигурации манипулятора. Это дает возможность реализовать алгоритм управления манипулятором в реальном времени в пространстве присоединенных переменных.

Пусть  ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$  — матрица поворота, имеющая размерность  $3 \times 3$  и преобразующая произвольный трехмерный вектор из

системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$  в систему координат  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ . Матрица  ${}^{i-1}\mathbf{R}_i$  является верхней левой подматрицей матрицы  ${}^{i-1}\mathbf{A}_i$ .

Выше было показано, что

$$({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^{-1} = {}^i\mathbf{R}_{i-1} = ({}^{i-1}\mathbf{R}_i)^T, \quad (3.3-47)$$

где

$${}^{i-1}\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (3.3-48)$$

$$[{}^{i-1}\mathbf{R}_i]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (3.3-49)$$

Вместо вычисления  $\omega_i, \dot{\omega}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \bar{\mathbf{a}}_i, \mathbf{p}_i^*, \bar{\mathbf{s}}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i, \mathbf{f}_i, \mathbf{n}_i$  и  $\tau_i$ , заданных в базовой системе координат, будем вычислять  ${}^i\mathbf{R}_0\omega_i, {}^i\mathbf{R}_0\dot{\omega}_i, {}^i\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_i, {}^i\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{a}}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{F}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{N}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{f}_i, {}^i\mathbf{R}_0\mathbf{n}_i$  и  ${}^i\mathbf{R}_0\tau_i$ , заданные в системе координат  $i$ -го звена  $(x_i, y_i, z_i)$ . Тогда равенства (3.3-28), (3.3-29), (3.3-35), (3.3-39), (3.3-36), (3.3-37), (3.3-43), (3.3-44) и (3.3-45) примут соответственно вид

$${}^i\mathbf{R}_0\omega_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\omega_{i-1} + z_0\dot{q}_i), & \text{если } i\text{-е сочленение —} \\ & \text{вращательное;} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\omega_{i-1}), & \text{если } i\text{-е сочленение —} \\ & \text{поступательное;} \end{cases} \quad (3.3-50)$$

$${}^i\mathbf{R}_0\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1} [{}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\omega}_{i-1} + z_0\dot{q}_i + ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\omega_{i-1}) \times z_0\dot{q}_i], & \text{если} \\ & i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\omega}_{i-1}), & \text{если } i\text{-е сочленение — поста-} \\ & \text{пательное;} \end{cases} \quad (3.3-51)$$

$${}^i\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} ({}^i\mathbf{R}_0\dot{\omega}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i^*) + ({}^i\mathbf{R}_0\omega_i) \times [({}^i\mathbf{R}_0\omega_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i^*)] + \\ + {}^i\mathbf{R}_{i-1} ({}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_{i-1}), & \text{если } i\text{-е сочленение — враща-} \\ & \text{тельное;} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1} (z_0\dot{q}_i + {}^{i-1}\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_{i-1}) + ({}^i\mathbf{R}_0\dot{\omega}_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i^*) + \\ + 2({}^i\mathbf{R}_0\omega_i) \times ({}^i\mathbf{R}_{i-1}z_0\dot{q}_i) + \\ + ({}^i\mathbf{R}_0\omega_i) \times [({}^i\mathbf{R}_0\omega_i) \times ({}^i\mathbf{R}_0\mathbf{p}_i^*)], & \text{если } i\text{-е сочлене-} \\ & \text{ние — поступательное;} \end{cases} \quad (3.3-52)$$

$${}^i R_0 \bar{a}_i = ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 \bar{s}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times [({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 \bar{s}_i)] + {}^i R_0 v_i, \quad (3.3-53)$$

$${}^i R_0 F_i = m_i {}^i R_0 \bar{a}_i, \quad (3.3-54)$$

$${}^i R_0 N_i = ({}^i R_0 I_i^0 R_i) ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times [({}^i R_0 I_i^0 R_i) ({}^i R_0 \omega_i)], \quad (3.3-55)$$

$${}^i R_0 \dot{f}_i = {}^i R_{i+1} ({}^{i+1} R_0 \dot{f}_{i+1}) + {}^i R_0 F_i, \quad (3.3-56)$$

$${}^i R_0 p_i = {}^i R_{i+1} [{}^{i+1} R_0 p_{i+1} + ({}^{i+1} R_0 p_i^*) \times ({}^{i+1} R_0 \dot{f}_{i+1})] + ({}^i R_0 p_i^* + {}^i R_0 \bar{s}_i) \times ({}^i R_0 F_i) + {}^i R_0 N_i, \quad (3.3-57)$$

$$\tau_i = \begin{cases} ({}^i R_0 n_i)^T ({}^i R_{i-1} z_0) + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ ({}^i R_0 \dot{f}_i)^T ({}^i R_{i-1} z_0) + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases} \quad (3.3-58)$$

Таблица 3.3. Рекуррентные уравнения движения в форме Ньютона — Эйлера, эффективные с вычислительной точки зрения

Прямые уравнения:  $i = 1, 2, \dots, n$

$${}^i R_0 \omega_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1} + z_0 \dot{q}_i), & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1}), & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases}$$

$${}^i R_0 \dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} [{}^{i-1} R_0 \dot{\omega}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i + ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1}) \times z_0 \dot{q}_i], & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \dot{\omega}_{i-1}), & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases}$$

$${}^i R_0 \dot{v}_i = \begin{cases} ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 p_i^*) + ({}^i R_0 \omega_i) \times [({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 p_i^*)] + \\ + {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \dot{v}_{i-1}), & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ {}^i R_{i-1} (z_0 \ddot{q}_i + {}^{i-1} R_0 \dot{v}_{i-1}) + ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 p_i^*) + \\ + 2 ({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_{i-1} z_0 \dot{q}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 p_i^*), & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное;} \end{cases}$$

$${}^i R_0 \bar{a}_i = ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 \bar{s}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times [({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 \bar{s}_i)] + {}^i R_0 \dot{v}_i.$$

Обратные уравнения:  $i = n, n-1, \dots, 1$

$${}^i R_0 \dot{f}_i = {}^i R_{i+1} ({}^{i+1} R_0 \dot{f}_{i+1}) + m_i {}^i R_0 \bar{a}_i,$$

$${}^i R_0 p_i = {}^i R_{i+1} [{}^{i+1} R_0 p_{i+1} + ({}^{i+1} R_0 p_i^*) \times ({}^{i+1} R_0 \dot{f}_{i+1})] + ({}^i R_0 p_i^* + {}^i R_0 \bar{s}_i) \times ({}^i R_0 F_i) + ({}^i R_0 I_i^0 R_i) ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times [({}^i R_0 I_i^0 R_i) ({}^i R_0 \omega_i)],$$

$$\tau_i = \begin{cases} ({}^i R_0 p_i)^T ({}^i R_{i-1} z_0) + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — вращательное;} \\ ({}^i R_0 \dot{f}_i)^T ({}^i R_{i-1} z_0) + b_i \dot{q}_i, & \text{если } i\text{-е сочленение — поступательное.} \end{cases}$$

Здесь  $z_0 = (0, 0, 1)^T$ , а  $b_i$  — коэффициент вязкого трения в  $i$ -м сочленении. Стандартный вид начальных условий с учетом действия силы тяжести следующий:  $\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0$ ;  $\dot{v}_0 = (g_x, g_y, g_z)^T$ , причем  $|g| = 9,8062 \text{ м/с}^2$ .

Здесь  $Z_0 = (0, 0, 1)^T$ ;  ${}^i R_0 \bar{s}_i$  — центр масс  $i$ -го звена в системе координат  $(x_i, y_i, z_i)$ ;  ${}^i R_0 p_i^*$  — вектор относительного положения начал систем координат  $(x_i, y_i, z_i)$  и  $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ , выраженный относительно системы координат  $(x_i, y_i, z_i)$  и равный

$${}^i R_0 p_i^* = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i \sin \alpha_i \\ d_i \cos \alpha_i \end{bmatrix}. \quad (3.3-59)$$

$({}^i R_0 I_i^0 R_i)$  — матрица инерции  $i$ -го звена относительно его центра масс, выраженная в системе координат  $(x_i, y_i, z_i)$ .

Итак, нами получены эффективные с вычислительной точки зрения уравнения движения, представляющие собой системы прямых и обратных рекуррентных уравнений, позволяющих вычислить кинематические и динамические параметры движения каждого звена в системе координат, связанной с этим звеном. Эти рекуррентные уравнения приведены в табл. 3.3.

### 3.3.6. Вычислительный алгоритм

В настоящее время уравнения движения манипулятора в форме Ньютона — Эйлера являются наиболее эффективным с вычислительной точки зрения описанием динамики движения манипулятора. Вычислительные затраты на реализацию этих уравнений приведены в табл. 3.4. Общее число необходимых математических операций (умножений и сложений) пропорционально  $n$  — числу степеней свободы манипулятора.

Таблица 3.4. Вычислительные затраты на реализацию уравнений движения в форме Ньютона — Эйлера для манипулятора Пума

Составляющие уравнений движения	Число операций умножения	Число операций сложения
${}^i R_0 \omega_i$	$9n^1$	$7n$
${}^i R_0 \dot{\omega}_i$	$9n$	$9n$
${}^i R_0 \dot{v}_i$	$27n$	$22n$
${}^i R_0 \bar{a}_i$	$15n$	$14n$
${}^i R_0 F_i$	$3n$	$0$
${}^i R_0 \dot{f}_i$	$9(n-1)$	$9(n-6)$
${}^i R_0 N_i$	$24n$	$18n$
${}^i R_0 p_i$	$21(n-15)$	$24(n-15)$
Общее число операций	$117(n-24)$	$103(n-21)$

<sup>1)</sup>  $n$  — число степеней свободы манипулятора.

Поскольку уравнения движения в такой форме являются рекуррентными по сути, целесообразно представить их в форме алгоритма вычисления задаваемых воздействий (сил или моментов) для силового привода каждого из сочленений. Ниже представлен такой алгоритм.

### Алгоритм 3.1. Метод Ньютона — Эйлера

Этот алгоритм вычисляет для  $n$ -звенного манипулятора моменты (или силы), которые должны быть созданы силовыми приводами сочленений для реализации заданной траектории движения манипулятора. Вычисления производятся по формулам из табл. 3.3.

Начальные условия:

$n$  — число звеньев,

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0,$$

$$\dot{v}_0 = g = (g_x, g_y, g_z)^T, \text{ где } |g| = 9,8062 \text{ м/с}^2.$$

Переменные:

$$q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad F_i, f_i, n_i, \tau_i.$$

Прямая последовательность:

- N1. [Установка счетчика.] Присвоить переменной  $i$  значение 1:  $i \leftarrow 1$ .
- N2. [Шаг вычисления кинематических параметров.] Вычислить  ${}^iR_0\omega_i$ ,  ${}^iR_0\dot{\omega}_i$ ,  ${}^iR_0v_i$  и  ${}^iR_0a_i$  по формулам табл. 3.3.
- N3. [Проверка  $i = n$ ?] Если  $i = n$ , перейти к выполнению шага N4, в противном случае увеличить на единицу значение переменной  $i$  ( $i \leftarrow i + 1$ ) и вернуться на N2.

Обратная последовательность:

- N4. [Установка  $f_{n+1}$  и  $n_{n+1}$ .] Присвоить  $f_{n+1}$  и  $n_{n+1}$  значения соответственно силы и момента, необходимых для поднятия груза. Если груз отсутствует, присвоить этим переменным нулевые значения.
- N5. [Вычисление заданных сил (моментов).] Вычислить  ${}^iR_0F_i$ ,  ${}^iR_0N_i$ ,  ${}^iR_0f_i$ ,  ${}^iR_0n_i$ ,  $\tau_i$  при известных  $f_{n+1}$  и  $n_{n+1}$ .
- N6. [Обратная итерация.] Если  $i = 1$ , закончить счет; в противном случае уменьшить значение счетчика  $i$  на единицу и перейти к выполнению N5.

### 3.3.7. Пример: двухзвенный манипулятор

Для иллюстрации применения уравнений Ньютона — Эйлера в этом разделе рассматривается двухзвенный манипулятор с вращательными сочленениями (рис. 3.2). Оси вращения всех сочленений параллельны оси  $z$ , перпендикулярной плоскости

рисунка. Физические параметры манипулятора приведены в разд. 3.2.6.

Сначала, пользуясь рис. 3.2 и равенствами (3.3-48), (3.3-49), сформируем матрицы поворота

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^0R_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2R_1 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2R_0 = \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с табл. 3.3 зададим следующие начальные условия:

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0; \quad \dot{v}_0 = (0, g, 0)^T, \text{ где } g = 9,8062 \text{ м/с}^2.$$

Прямые уравнения. Пользуясь равенством (3.3-50), вычислим угловые скорости 1-го и 2-го звеньев. Для 1-го звена при  $\omega_0 = 0$  имеем

$${}^1R_0\omega_1 = {}^1R_0(\omega_0 + z_0\dot{\theta}_1) = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1.$$

Для 2-го звена

$$\begin{aligned} {}^2R_0\omega_2 &= {}^2R_1({}^1R_0\omega_1 + z_0\dot{\theta}_2) = \\ &= \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2). \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (3.3-51), вычислим угловые ускорения 1-го и 2-го звеньев. Для 1-го звена, учитывая, что  $\omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0$ , имеем

$${}^1R_0\dot{\omega}_1 = {}^1R_0(\dot{\omega}_0 + z_0\ddot{\theta}_1 + \omega_0 \times z_0\dot{\theta}_1) = (0, 0, 1)^T \ddot{\theta}_1.$$

Для 2-го звена

$${}^2R_0\dot{\omega}_2 = {}^2R_1[{}^1R_0\dot{\omega}_1 + z_0\ddot{\theta}_2 + ({}^1R_0\omega_1) \times z_0\dot{\theta}_2] = (0, 0, 1)^T (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2).$$

Пользуясь равенством (3.3-52), вычислим линейные ускорения точек, являющихся началами систем координат 1-го и 2-го звеньев. Для 1-го звена, учитывая, что  $\dot{\mathbf{v}}_0 = (0, g, 0)^T$ , имеем

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_1 &= ({}^1\mathbf{R}_0\dot{\omega}_1) \times ({}^1\mathbf{R}_0\mathbf{p}_1^*) + ({}^1\mathbf{R}_0\dot{\omega}_1) \times [({}^1\mathbf{R}_0\dot{\omega}_1) \times ({}^1\mathbf{R}_0\mathbf{p}_1^*)] + {}^1\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_2 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} gS_1 \\ gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -l\ddot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для 2-го звена

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_2 &= ({}^2\mathbf{R}_0\dot{\omega}_2) \times ({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{p}_2^*) + ({}^2\mathbf{R}_0\dot{\omega}_2) \times [({}^2\mathbf{R}_0\dot{\omega}_2) \times ({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{p}_2^*)] + \\ &+ {}^2\mathbf{R}_1({}^1\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \right. \\ &\times \left. \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l\ddot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gS_{12} \\ l(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2) + gC_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (3.3-53), найдем линейные ускорения центров масс 1-го и 2-го звеньев. Для 1-го звена имеем

$${}^1\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{a}}_1 = ({}^1\mathbf{R}_0\dot{\omega}_1) \times ({}^1\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{s}}_1) + ({}^1\mathbf{R}_0\dot{\omega}_1) \times [({}^1\mathbf{R}_0\dot{\omega}_1) \times ({}^1\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{s}}_1)] + {}^1\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_1,$$

где

$$\bar{\mathbf{s}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_1 \\ -\frac{l}{2}S_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^1\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{s}}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_1 \\ -\frac{l}{2}S_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{a}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} -l\ddot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ l\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}\ddot{\theta}_1^2 + gS_1 \\ \frac{l}{2}\ddot{\theta}_1 + gC_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для 2-го звена

$${}^2\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{a}}_2 = ({}^2\mathbf{R}_0\dot{\omega}_2) \times ({}^2\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{s}}_2) + ({}^2\mathbf{R}_0\dot{\omega}_2) \times [({}^2\mathbf{R}_0\dot{\omega}_2) \times ({}^2\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{s}}_2)] + {}^2\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{v}}_2,$$

где

$$\bar{\mathbf{s}}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_{12} \\ -\frac{l}{2}S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{s}}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l}{2}C_{12} \\ -\frac{l}{2}S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{R}_0\bar{\mathbf{a}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \begin{bmatrix} l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gS_{12} \\ l(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2) + gC_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gS_{12} \\ l(C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2) + gC_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Обратные уравнения.** Считая, что схват манипулятора не нагружен, имеем  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{p}_3 = 0$ . Для расчета сил, действующих на звенья, пользуемся равенством (3.3-56). Для 2-го звена с учетом

того, что  $f_3 = 0$ , имеем

$${}^2R_0f_2 = {}^2R_3({}^3R_0f_3) + {}^2R_0F_2 = {}^2R_0F_2 = m_2^2R_0\bar{a}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} m_2l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - 1/2\dot{\theta}_1^2 - 1/2\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gm_2S_{12} \\ m_2l(C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2 + 1/2\ddot{\theta}_1 + 1/2\ddot{\theta}_2) + gm_2C_{12} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для 1-го звена

$${}^1R_0f_1 = {}^1R_2({}^2R_0f_2) + {}^1R_0F_1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} m_2l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - 1/2\dot{\theta}_1^2 - 1/2\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gm_2S_2 \\ m_2l(C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2 + 1/2\ddot{\theta}_1 + 1/2\ddot{\theta}_2) + gm_2C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + m_1^1R_0\bar{a}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} m_2l[-\dot{\theta}_1^2 - 1/2C_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 1/2S_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] - \\ - m_2g(C_{12}S_2 - C_2S_{12}) - 1/2m_1l\dot{\theta}_1^2 + m_1gS_1 \\ m_2l[\ddot{\theta}_1 - 1/2S_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 1/2C_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)] + \\ + m_2gC_1 + 1/2m_1l\ddot{\theta}_1 + gm_1C_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью равенства (3.3-57) вычислим моменты, действующие на звенья. Для 2-го звена с учетом того, что  $n_3 = 0$ , имеем

$${}^2R_0n_2 = ({}^2R_0p_2^* + {}^2R_0\bar{s}_2) \times ({}^2R_0F_2) + {}^2R_0N_2,$$

где

$$p_2^* = \begin{bmatrix} lC_{12} \\ lS_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2R_0p_2^* = \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} & 0 \\ -S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} lC_{12} \\ lS_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$R_0n_2 = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_2l(S_2\ddot{\theta}_1 - C_2\dot{\theta}_1^2 - 1/2\dot{\theta}_1^2 - 1/2\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + gm_2S_{12} \\ m_2l(C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2 + 1/2\ddot{\theta}_1 + 1/2\ddot{\theta}_2) + gm_2C_{12} \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2m_2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2m_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3m_2l^2\ddot{\theta}_1 + 1/3m_2l^2\ddot{\theta}_2 + 1/3m_2l^2(C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1^2) + 1/2m_2glC_{12} \end{bmatrix}.$$

Для 1-го звена получаем

$${}^1R_0n_1 = {}^1R_2[{}^2R_0n_2 + ({}^2R_0p_1^*) \times ({}^2R_0f_2)] +$$

$$+ ({}^1R_0p_1^* + {}^1R_0\bar{s}_1) \times ({}^1R_0F_1) + {}^1R_0N_1,$$

где

$$p_1^* = \begin{bmatrix} lC_1 \\ lS_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^2R_0p_1^* = \begin{bmatrix} lC_2 \\ -lS_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^1R_0p_1^* = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$${}^1R_0n_1 = {}^1R_2({}^2R_0n_2) + {}^1R_2[({}^2R_0p_1^*) \times ({}^2R_0f_2)] +$$

$$+ \left[\frac{l}{2}, 0, 0\right]^T \times {}^1R_0F_1 + {}^1R_0N_1.$$

Наконец, в соответствии с выражением (3.3-58) определим моменты, которые должны быть реализованы силовыми приводами сочленений. Для 2-го сочленения, полагая  $b_2 = 0$ , получаем

$$\tau_2 = ({}^2R_0n_2)^T ({}^2R_1z_0) =$$

$$= 1/3m_2l^2\ddot{\theta}_1 + 1/3m_2l^2\ddot{\theta}_2 + 1/2m_2l^2C_2\ddot{\theta}_1 + 1/2m_2glC_{12} + 1/2m_2l^2S_2\dot{\theta}_1.$$

Для 1-го сочленения при  $b_1 = 0$  имеем

$$\tau_1 = ({}^1R_0n_1)^T ({}^1R_0z_0) =$$

$$= 1/3m_1l^2\ddot{\theta}_1 + 1/3m_2l^2\ddot{\theta}_1 + 1/3m_2l^2\ddot{\theta}_2 + m_2C_2l^2\ddot{\theta}_1 + 1/2m_2l^2\ddot{\theta}_2 -$$

$$- m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2^2 + 1/2m_1glC_1 + 1/2m_2glC_{12} + m_2glC_1.$$

Эти уравнения динамики движения манипулятора совпадают с уравнениями, полученными в разделе 3.2.6 с применением метода Лагранжа — Эйлера.

#### 3.4. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ Д'АЛАМБЕРА

Вычислительная неэффективность уравнений Лагранжа — Эйлера обусловлена использованием матриц преобразования однородных координат. В то же время удобство использования уравнений Ньютона — Эйлера объясняется их рекуррентностью и векторной формой записи. Для того чтобы получить замкнутую и эффективную с вычислительной точки зрения форму записи уравнений движения, можно, описав кинематику звеньев с помощью векторов относительного положения и трехмерных матриц поворота, вычислить кинетическую и потенциальную энергии манипулятора, сформировать функцию Лагранжа, а затем воспользоваться уравнениями Лагранжа — Эйлера. В этом

разделе мы получим уравнения движения Д'Аламбера в форме Лагранжа, или, что то же самое, обобщенные уравнения Д'Аламбера. Здесь мы будем рассматривать только манипуляторы с вращательными сочленениями.

Считая звенья манипулятора твердыми телами, угловую скорость  $\omega_s$   $s$ -го звена относительно базовой системы координат

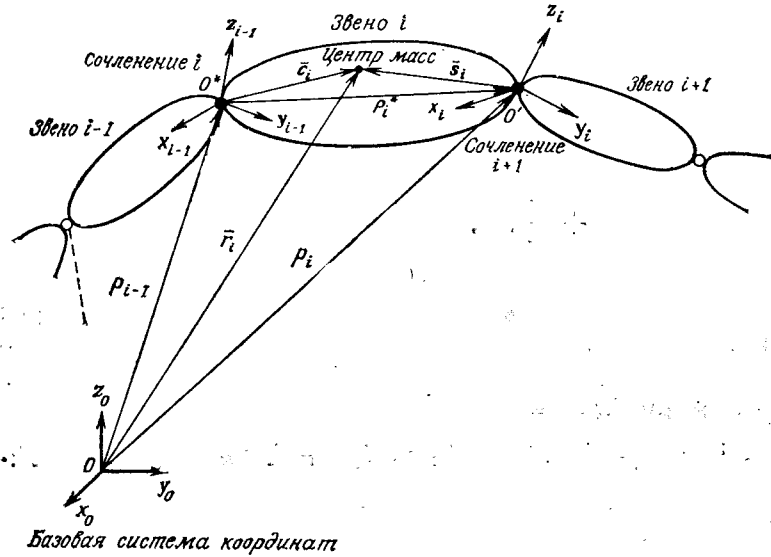


Рис. 3.8. Определение векторов, используемых в обобщенных уравнениях Д'Аламбера.

можно представить как сумму относительных угловых скоростей звеньев с меньшими номерами (рис. 3.8):

$$\omega_s = \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j z_{j-1}, \quad (3.4-1)$$

где  $z_{j-1}$  — ось вращения  $j$ -го сочленения, заданная в базовой системе координат. Умножая слева обе части равенства (3.4-1) на  ${}^s R_0$ , получим угловую скорость  $s$ -го звена, выраженную в системе координат этого звена:

$${}^s R_0 \omega_s = \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s R_0 z_{j-1}. \quad (3.4-2)$$

Пусть (см. рис. 3.8)  $\bar{r}_s$  — вектор положения центра масс  $s$ -го звена в базовой системе координат. Его можно представить в следующем виде:

$$\bar{r}_s = \sum_{j=1}^{s-1} p_j^* + \bar{c}_s, \quad (3.4-3)$$

где  $\bar{c}_s$  — вектор относительного положения центра масс  $s$ -го звена и начала  $(s-1)$ -й системы координат, выраженный в базовой системе координат.

С помощью равенств (3.4-1) — (3.4-3) линейную скорость  $v_s$   $s$ -го звена в базовой системе координат можно представить в виде суммы линейных скоростей, обусловленных движением звеньев с меньшими номерами:

$$v_s = \sum_{k=1}^{s-1} \left[ \left[ \sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j z_{j-1} \right] \times p_k^* \right] + \left[ \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j z_{j-1} \right] \times \bar{c}_s. \quad (3.4-4)$$

Кинетическая энергия  $s$ -го звена ( $1 \leq s \leq n$ ), имеющего массу  $m_s$ , складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения вокруг центра масс:

$$K_s = (K_s)_{\text{пост}} + (K_s)_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} m_s (U_s \cdot U_s) + \frac{1}{2} ({}^s R_0 \omega_s)^T I_s ({}^s R_0 \omega_s), \quad (3.4-5)$$

где  $I_s$  — тензор инерции  $s$ -го звена относительно центра масс, представленный в системе координат  $s$ -го звена.

Для простоты рассуждений динамические эффекты, связанные с поступательным и вращательным движениями и воздействием силы тяжести, рассмотрим по отдельности. Применяя уравнения Лагранжа к составляющей кинетической энергии, обусловленной поступательным движением  $s$ -го звена, имеем для  $s \geq i$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K_s)_{\text{пост}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K_s)_{\text{пост}}}{\partial \theta_i} = \frac{d}{dt} \left[ m_s v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - m_s v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial \theta_i} = m_s v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial \dot{\theta}_i} + m_s v_s \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial v_s}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - m_s v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial \theta_i}, \quad (3.4-6)$$

где

$$\frac{\partial v_s}{\partial \dot{\theta}_i} = z_{i-1} \times (p_i^* + p_{i+1}^* + \dots + p_{s-1}^* + \bar{c}_s) = z_{i-1} \times (\bar{r}_s - p_{i-1}), \quad s \geq i. \quad (3.4-7)$$

С учетом тождеств

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial v_s}{\partial \dot{\theta}_i} \right] = \frac{\partial \dot{v}_s}{\partial \dot{\theta}_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{v}_s}{\partial \theta_i} = \frac{\partial v_s}{\partial \theta_i} \quad (3.4-8)$$

равенство (3.4-6) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K_s)_{\text{пост}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K_s)_{\text{пост}}}{\partial \theta_i} = m_s \dot{v}_s \cdot [z_{i-1} \times (\bar{r}_s - p_{i-1})]. \quad (3.4-9)$$



Суммируя по всем звеньям от  $i$  до  $n$ , получаем силы, обусловленные поступательным движением всех звеньев:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K.E.)_{\text{пост}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K.E.)_{\text{пост}}}{\partial \theta_i} = \\ & = \sum_{s=i}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K_s)_{\text{пост}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K_s)_{\text{пост}}}{\partial \theta_i} \right\} = \sum_{s=i}^n m_s \mathbf{v}_s \cdot [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})], \end{aligned} \quad (3.4-10)$$

где с учетом равенств (3.3-8) и (3.3-12) ускорение  $\mathbf{v}_s$   $s$ -го звена определяется формулой

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_s &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^{s-1} \left[ \left( \sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \mathbf{p}_k^* \right] + \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \bar{\mathbf{c}}_s \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^{s-1} \left[ \left( \sum_{j=1}^k \ddot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \mathbf{p}_k^* + \right. \\ &+ \left. \left\{ \left( \sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \left[ \left( \sum_{j=1}^k \dot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \mathbf{p}_k^* \right] \right\} \right] + \\ &+ \left[ \left( \sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \bar{\mathbf{c}}_s \right] + \left\{ \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \left[ \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \bar{\mathbf{c}}_s \right] \right\} + \\ &+ \sum_{k=2}^{s-1} \left\{ \sum_{p=2}^k \left[ \left( \sum_{q=1}^{p-1} \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right] \times \mathbf{p}_k^* \right\} + \\ &+ \left\{ \sum_{p=2}^s \left[ \left( \sum_{q=1}^{p-1} \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right] \times \bar{\mathbf{c}}_s \right\}. \end{aligned} \quad (3.4-11)$$

Кинетическая энергия вращения  $s$ -го звена определяется формулой

$$(K_s)_{\text{вращ}} = 1/2 ({}^s \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\omega}_s)^T \mathbf{I}_s ({}^s \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\omega}_s) = 1/2 \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right)^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right). \quad (3.4-12)$$

Поскольку

$$\frac{\partial (K_s)_{\text{вращ}}}{\partial \dot{\theta}_i} = ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right), \quad s \geq i, \quad (3.4-13)$$

$$\frac{\partial ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1})}{\partial \theta_i} = {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \times {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1}, \quad i \geq j, \quad (3.4-14)$$

и

$$\frac{d}{dt} ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1}) = \sum_{j=i}^s \left( \frac{\partial}{\partial \theta_j} {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1} \right) \frac{d\theta_j}{dt} = {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1} \times \left( \sum_{j=i}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right); \quad (3.4-15)$$

дифференцируя по времени равенство (3.4-13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K_s)_{\text{вращ}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] &= \left( \frac{d}{dt} {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1} \right)^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right) + \\ &+ ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right) + ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left[ \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j \left( \frac{d}{dt} {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right) \right] = \\ &= \left( {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1} \times \sum_{j=i}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right)^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right) + \\ &+ ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right) + \\ &+ ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left[ \sum_{j=1}^s \left( \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \times \sum_{k=j+1}^s \dot{\theta}_k {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{k-1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.4-16)$$

Пользуясь теперь равенством (3.4-14), найдем частную производную величины  $(K_s)_{\text{вращ}}$  по координате  $\theta_i$  ( $s \geq i$ ):

$$\frac{\partial (K_s)_{\text{вращ}}}{\partial \theta_i} = \left[ \left[ \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right] \times {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1} \right]^T \mathbf{I}_s \left[ \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right]. \quad (3.4-17)$$

Вычитая (3.4-17) из (3.4-16) и производя суммирование по всем звеньям от  $i$  до  $n$ , получаем силы, обусловленные вращательным движением звеньев:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K.E.)_{\text{вращ}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K.E.)_{\text{вращ}}}{\partial \theta_i} = \\ &= \sum_{s=i}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K_s)_{\text{вращ}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K_s)_{\text{вращ}}}{\partial \theta_i} \right\} = \\ &= \sum_{s=i}^n \left( ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left\{ \sum_{j=1}^s \left[ \dot{\theta}_j {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{j-1} \times \left( \sum_{k=j+1}^s \dot{\theta}_k {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{k-1} \right) \right] \right\} + \\
& + \left[ {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1} \times \left( \sum_{k=1}^s \dot{\theta}_k {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{k-1} \right) \right]^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \dot{\theta}_j {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{j-1} \right), \\
& i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4-18)
\end{aligned}$$

Потенциальная энергия манипулятора складывается из потенциальных энергий всех его звеньев

$$P. E. = \sum_{s=1}^n P_s, \quad (3.4-19)$$

где  $P_s$  — потенциальная энергия  $s$ -го звена, вычисляемая по формуле

$$P_s = -\mathbf{g} \cdot m_s \bar{\mathbf{r}}_s = -\mathbf{g} \cdot m_s (\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_i^* + \dots + \bar{\mathbf{c}}_s). \quad (3.4-20)$$

Здесь  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)^T$  и  $|\mathbf{g}| = 9,8062$  м/с<sup>2</sup>. Применяя уравнение Лагранжа — Эйлера, имеем для

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (P_s)}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (P_s)}{\partial \theta_i} &= - \frac{\partial (P_s)}{\partial \theta_i} = \mathbf{g} \cdot m_s \frac{\partial (\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_i^* + \dots + \bar{\mathbf{c}}_s)}{\partial \theta_i} = \\
&= \mathbf{g} \cdot m_s \frac{\partial (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})}{\partial \theta_i} = \mathbf{g} \cdot m_s [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})], \quad (3.4-21)
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{p}_{i-1}$  не зависит от  $\theta_i$ . Суммируя по всем звеньям от  $i$  до  $n$ , получаем моменты, обусловленные силой тяжести:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (P. E.)}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (P. E.)}{\partial \theta_i} &= - \sum_{s=i}^n \frac{\partial (P_s)}{\partial \theta_i} = \\
&= \sum_{s=i}^n \mathbf{g} \cdot m_s [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})]. \quad (3.4-22)
\end{aligned}$$

Суммируя равенства (3.4-10), (3.4-18) и (3.4-22), получаем момент  $\tau_i$ , создаваемый силовым приводом  $i$ -го сочленения для реализации заданного движения манипулятора:

$$\begin{aligned}
\tau_i &= \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (K. E.)_{\text{пост}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right] - \frac{\partial (K. E.)_{\text{пост}}}{\partial \theta_i} \right\} + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (K. E.)_{\text{вращ}}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \right. \\
&- \left. \frac{\partial (K. E.)_{\text{вращ}}}{\partial \theta_i} \right] + \frac{\partial (P. E.)}{\partial \theta_i} = \sum_{s=i}^n \left( m_s \left\{ \left[ \sum_{k=1}^{s-1} \left( \sum_{j=1}^k \ddot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \mathbf{p}_k^* \right] + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left[ \left( \sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j \mathbf{z}_{j-1} \right) \times \bar{\mathbf{c}}_s \right] \right\} \cdot [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})] \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=i}^n \left[ ({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{j=1}^s \ddot{\theta}_j {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{j-1} \right) \right] + \\
& + \sum_{s=i}^n \left( m_s \left[ \sum_{k=1}^{s-1} \left( \left( \sum_{p=1}^k \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right) \times \left[ \left( \sum_{q=1}^k \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \mathbf{p}_k^* \right] \right) \right] + \right. \\
& + \left. \left\{ \sum_{p=2}^k \left[ \left( \sum_{q=1}^{p-1} \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right] \times \mathbf{p}_k^* \right\} \right] \cdot [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})] \right) + \\
& + \sum_{s=i}^n \left( m_s \left\{ \left( \sum_{p=1}^s \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right) \times \left[ \left( \sum_{q=1}^s \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \bar{\mathbf{c}}_s \right] \right\} + \right. \\
& + \left. \left\{ \sum_{p=2}^s \left[ \left( \sum_{q=1}^{p-1} \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right] \times \bar{\mathbf{c}}_s \right\} \right) \cdot [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})] \right) + \\
& + \sum_{s=i}^n \left( ({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left\{ \sum_{j=1}^s \left[ \dot{\theta}_j {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{j-1} \times \left( \sum_{k=j+1}^s \dot{\theta}_k {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{k-1} \right) \right] \right\} + \right. \\
& + \left. \left[ {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1} \times \left( \sum_{p=1}^s \dot{\theta}_p {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{p-1} \right) \right]^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{q=1}^s \dot{\theta}_q {}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{q-1} \right) \right) + \\
& + \mathbf{g} \cdot \left\{ \mathbf{z}_{i-1} \times \left[ \sum_{j=1}^n m_j (\bar{\mathbf{r}}_j - \mathbf{p}_{i-1}) \right] \right\}. \quad (3.4-23)
\end{aligned}$$

Полученное равенство можно представить в следующей более наглядной форме:

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{\theta}_j(t) + h_i^{\text{пост}}(\theta, \dot{\theta}) + h_i^{\text{вращ}}(\theta, \dot{\theta}) + \mathbf{c}_i = \tau_i(t), \quad (3.4-24)$$

где для  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= D_{ij}^{\text{вращ}} + D_{ij}^{\text{пост}} = \sum_{s=j}^n [({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s ({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{j-1})] + \\
& + \sum_{s=j}^n \left\{ m_s \left[ \mathbf{z}_{j-1} \times \left( \sum_{k=j}^{s-1} \mathbf{p}_k^* + \bar{\mathbf{c}}_s \right) \right] \cdot [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})] \right\} = \\
& = \sum_{s=j}^n [({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s ({}^s\mathbf{R}_0\mathbf{z}_{j-1})] + \\
& + \sum_{s=j}^n \{ m_s [\mathbf{z}_{j-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{j-1})] \cdot [\mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1})] \}, \quad i \leq j; \quad (3.4-25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_i^{\text{пост}}(\theta, \dot{\theta}) = & \sum_{s=i}^n \left\{ m_s \left[ \sum_{k=1}^{s-1} \left( \left( \sum_{p=1}^k \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right) \left[ \left( \sum_{q=1}^k \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \mathbf{p}_k^* \right] \right) \right] + \right. \\
& + \left. \left\{ \sum_{p=2}^k \left[ \left( \sum_{q=1}^{p-1} \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right] \times \mathbf{p}_k^* \right\} \right] \cdot \left[ \mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1}) \right] \left. \right\} + \\
& + \sum_{s=i}^n \left[ m_s \left( \left( \sum_{p=1}^s \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right) \times \left[ \left( \sum_{q=1}^s \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \bar{\mathbf{c}}_s \right] \right) + \right. \\
& + \left. \left\{ \sum_{p=2}^s \left[ \left( \sum_{q=1}^{p-1} \dot{\theta}_q \mathbf{z}_{q-1} \right) \times \dot{\theta}_p \mathbf{z}_{p-1} \right] \times \bar{\mathbf{c}}_s \right\} \right] \cdot \left[ \mathbf{z}_{i-1} \times (\bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{p}_{i-1}) \right];
\end{aligned} \tag{3.4-26}$$

$$\begin{aligned}
h_i^{\text{вращ}}(\theta, \dot{\theta}) = & \sum_{s=i}^n \left\{ ({}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1})^T \mathbf{I}_s \left\{ \sum_{j=1}^s \left[ \dot{\theta}_j {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{j-1} \left( \sum_{k=j+1}^s \dot{\theta}_k {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{k-1} \right) \right] \right\} + \right. \\
& + \left. \left[ {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{i-1} \times \left( \sum_{p=1}^s \dot{\theta}_p {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{p-1} \right) \right]^T \mathbf{I}_s \left( \sum_{q=1}^s \dot{\theta}_q {}^s \mathbf{R}_0 \mathbf{z}_{q-1} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.4-27}$$

$$\text{и} \quad c_i = -\mathbf{g} \cdot \left[ \mathbf{z}_{i-1} \times \sum_{j=i}^n m_j (\bar{\mathbf{r}}_j - \mathbf{p}_{i-1}) \right]. \tag{3.4-28}$$

Динамические коэффициенты  $D_{ij}$ ,  $c_i$  являются функциями присоединенных переменных и параметров манипулятора, в то время как  $h_i^{\text{пост}}$  и  $h_i^{\text{вращ}}$  — функции присоединенных переменных, скоростей и параметров манипулятора. Эти коэффициенты имеют следующий физический смысл:

● Коэффициенты  $D_{ij}$  связаны с инерционностью звеньев манипулятора. Равенство (3.4-25) отражает влияние ускоренного движения в  $j$ -м сочленении на реализующийся в  $i$ -м сочленении вращающий момент  $\tau_i$ . Первое слагаемое в выражении (3.4-25) учитывает влияние вращательного движения  $j$ -го звена на возникающий в  $i$ -м сочленении момент. Если  $i=j$ , то  $D_{ii}$  характеризует момент сил инерции, возникающий в  $i$ -м сочленении в ответ на ускоренное вращение  $i$ -го звена. Если  $i \neq j$ , это слагаемое характеризует момент сил инерции, возникающий в  $i$ -м сочленении в ответ на ускоренное вращение  $j$ -го звена. Второе слагаемое в выражении (3.4-25) отражает аналогичные эффекты, обусловленные поступательным ускоренным движением звеньев.

● Слагаемое  $h_i^{\text{пост}}(\theta, \dot{\theta})$  отражает эффекты, связанные с постоянной скоростью изменения присоединенных переменных. Равенство (3.4-26) описывает суммарный момент центробежной и кориолисовой сил, возникающий в  $i$ -м сочленении как следствие движения в  $p$ -м и  $q$ -м сочленениях и обусловленный поступательным движением  $p$ -го и  $q$ -го звеньев. Первое и третье слагаемые в выражении (3.4-26) представляют собой центробежную и кориолисову силы инерции, обусловленные соответственно

поступательным движением звеньев с номерами, меньшими  $s$ , и поступательным движением  $s$ -го звена. Если  $p=q$ , это центробежная сила, действующая в  $i$ -м сочленении. Если  $p \neq q$ , это кориолисова сила, действующая в  $i$ -м сочленении. Второе и четвертое слагаемые в выражении (3.4-26) описывают силы кориолиса, обусловленные соответственно поступательным движением всех звеньев с номерами, меньшими  $s$ , и поступательным движением  $s$ -го звена.

● Слагаемое  $h_i^{\text{вращ}}(\theta, \dot{\theta})$  также связано с постоянной скоростью изменения присоединенных переменных. Аналогично равенству 3.4-26 равенство (3.4-27) описывает суммарный момент центробежной и кориолисовой сил, возникающий в  $i$ -м сочленении как следствие движения в  $p$ -м и  $q$ -м сочленениях, но в отличие от  $h_i^{\text{пост}}(\theta, \dot{\theta})$  обусловленный вращательным движением  $p$ -го и  $q$ -го звеньев. Первое слагаемое в равенстве (3.4-27) описывает чисто кориолисовы силы инерции, действующие в  $i$ -м сочленении вследствие поступательного движения  $p$ -го и  $q$ -го звеньев. Второе слагаемое описывает сумму центробежной и кориолисовой сил инерции, действующих в  $i$ -м сочленении. Если  $p=q$ , это центробежная сила, действующая в  $i$ -м сочленении; если  $p \neq q$ , это кориолисова сила, вызванная вращательным движением  $p$ -го и  $q$ -го звеньев.

● Коэффициент  $c_i$  характеризует силу, с которой звенья с номерами, большими  $i$ , воздействуют на  $i$ -е сочленения под действием силы тяжести.

Таблица 3.5. Сравнение вычислительной сложности различных форм уравнений динамики движения манипулятора <sup>1)</sup>

	Уравнения Лагранжа — Эйлера	Уравнения Ньютона — Эйлера	Обобщенные уравнения Д'Аламбера
Число операций умножения	$128/3n^4 + 512/3n^3 + 739/3n^2 + 160/3n$	$132n$	$13/6n^3 + 105/2n^2 + 268/3n + 69$
Число операций сложения	$98/3n^4 + 781/6n^3 + 559/3n^2 + 245/6n$	$111n - 4$	$4/3n^3 + 44n^2 + 146/3n + 45$
Кинематическое описание	Однородные матрицы размерностью $4 \times 4$	Матрицы поворотов и векторы положения	Матрицы поворотов и векторы положения
Форма уравнений движения	Замкнутая система дифференциальных уравнений	Рекуррентные уравнения	Замкнутая система дифференциальных уравнений

<sup>1)</sup>  $n$  — число степеней свободы манипулятора. Расчет числа необходимых операций производился без предварительной оптимизации уравнений.

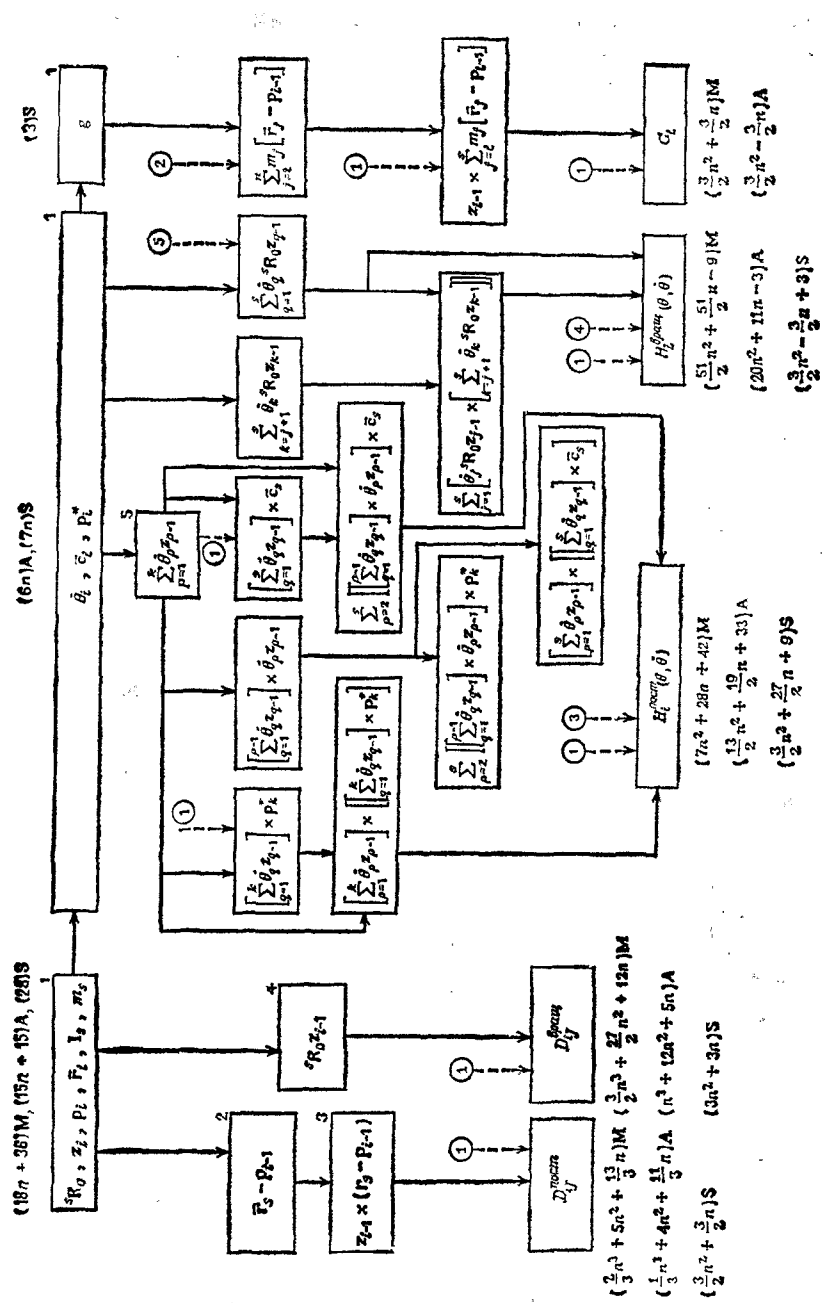


Рис. 3.9. Схема вычисления коэффициентов  $D_{ij}$ ,  $h_i^{post}$ ,  $h_i^{вращ}$  и  $C_i$ . M — операция умножения; A — операция сложения; S — используемая ячейка памяти; цифра в кружке обозначает выход  $n$ -го блока.

На первый взгляд для решения уравнений (3.4-25) — (3.4-28) требуется большое количество вычислений. Однако большинство входящих в них векторных произведений вычисляются очень быстро. Вычислительная сложность полученных уравнений видна из блок-схемы (рис. 3.9), подробно описывающей процедуру вычисления динамических коэффициентов в каждой расчетной точке траектории манипулятора с указанием числа необходимых операций сложения и умножения. Табл. 3.5 позволяет провести сравнение вычислительных трудоемкостей трех полученных нами форм представления уравнений динамики движения манипулятора.

### 3.4.1. Эмпирический подход к формированию упрощенной динамической модели

Полученные нами обобщенные уравнения Д'Аламбера (3.4-24) — (3.4-28) упрощают, в частности, решение задачи построения приближенной динамической модели манипулятора, необходимой для выбора закона управления манипулятором в пространстве переменных состояния. Аналогично уравнениям Лагранжа — Эйлера обобщенные уравнения Д'Аламбера содержат в явной форме слагаемые, характеризующие по отдельности влияние сил инерции, обусловленных ускоренным движением звеньев, кориолисовой и центробежной силами инерции. Более того, эти уравнения позволяют вычислить по отдельности и сравнить влияние сил инерции, обусловленных вращательным и поступательным движением звеньев в каждой точке траектории манипулятора. На основе такого сравнения при построении упрощенной динамической модели слагаемыми, мало влияющими на возникающие в процессе движения манипулятора силы и моменты, можно пренебречь.

В качестве примера рассмотрим динамику движения робота Пума 560 вдоль заданной траектории. На рис. 3.10 и 3.11 приведены графики зависимости от времени динамических коэффициентов  $D_{ij}^{post}$ ,  $D_{ij}^{вращ}$ ,  $h_i^{post}$ ,  $h_i^{вращ}$ , построенные для этой траектории. Число расчетных точек траектории равно 31. Графики, приведенные на рис. 3.10, соответствуют коэффициентам  $D_{ij}^{вращ}$  и  $D_{ij}^{post}$ , которые характеризуют силы инерции, обусловленные ускоренным движением звеньев. На рис. 3.11 показано поведение слагаемых  $h_i^{post}$  и  $h_i^{вращ}$ , связанных с центробежной и кориолисовой силами. На каждом из рисунков представлены три кривые, отражающие отдельно влияние сил инерции, обусловленных поступательным и вращательным движениями звеньев, а также их суммарное влияние.

Из анализа графиков, приведенных на рис. 3.10, можно сделать следующие выводы, позволяющие сформировать упрощенную модель динамики манипулятора:

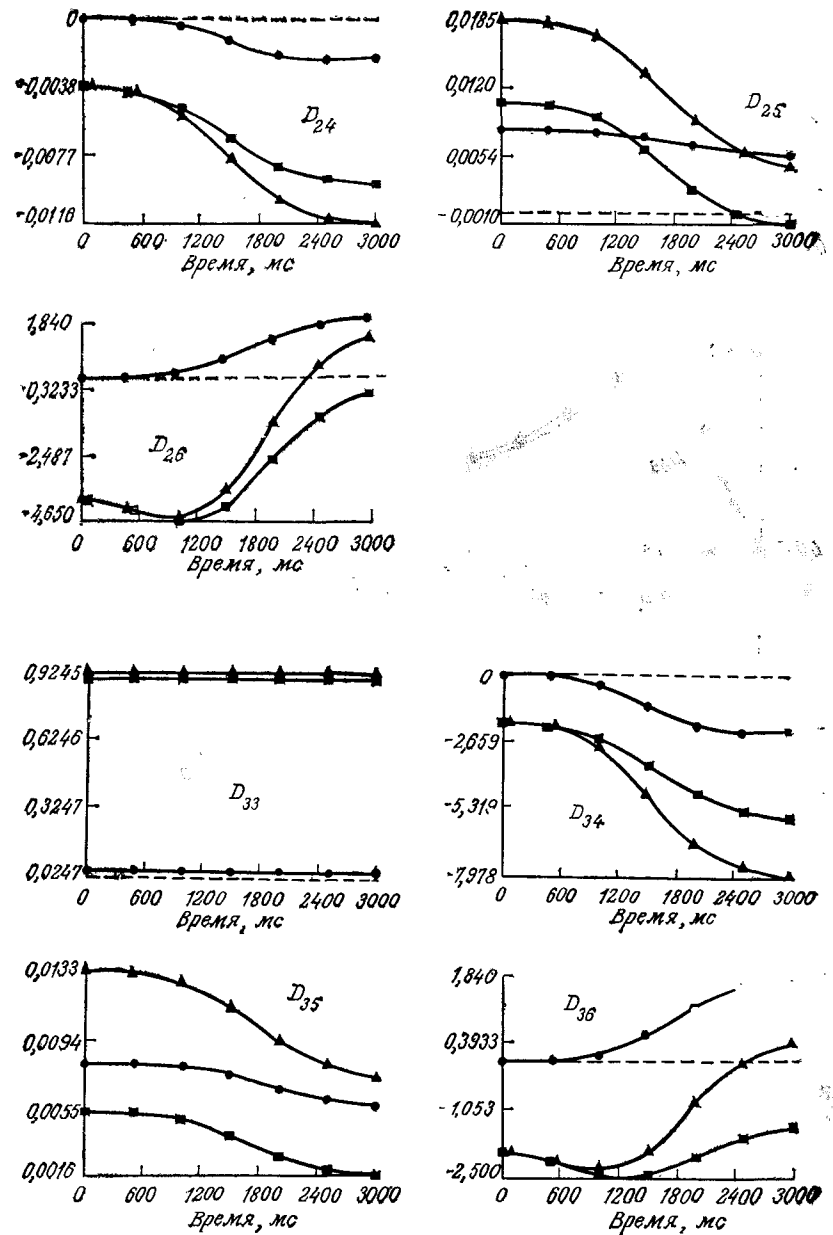
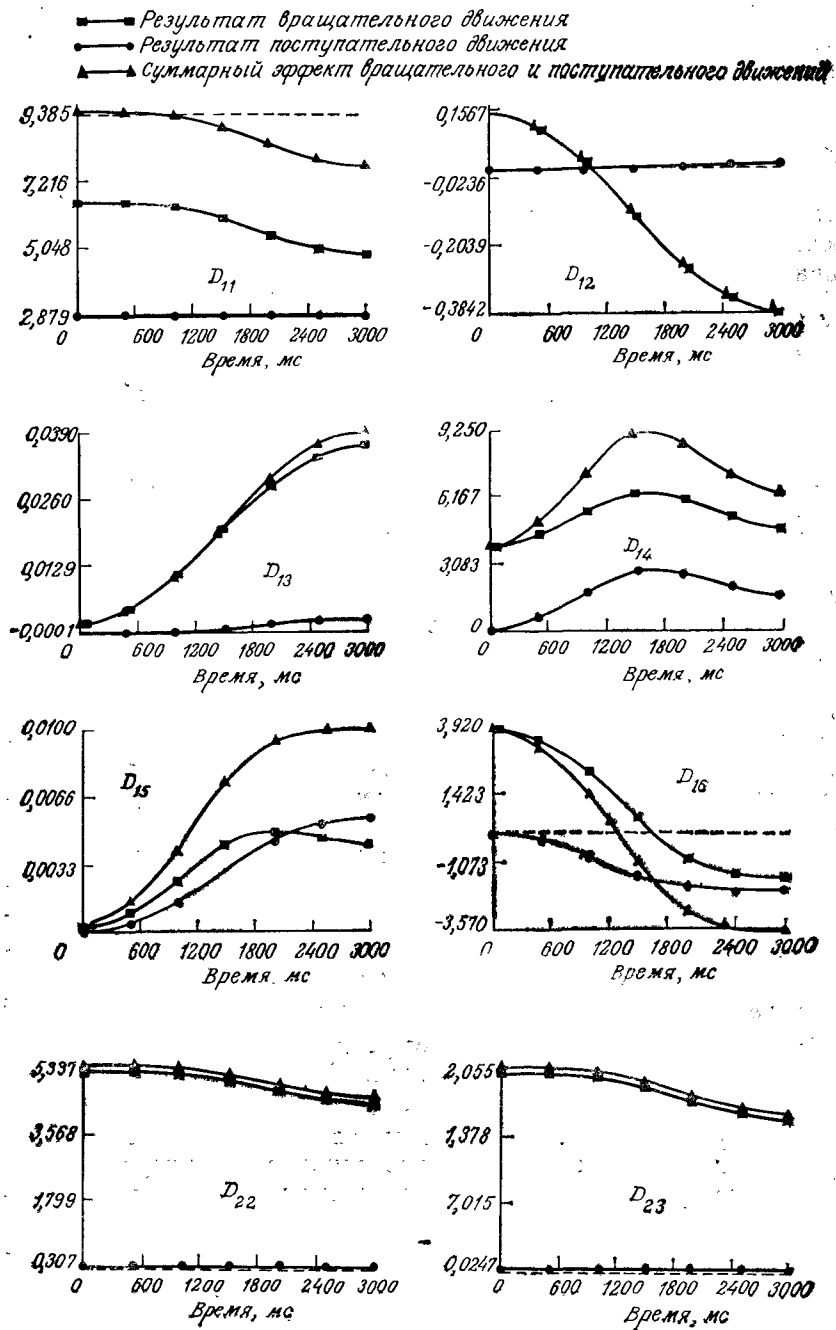
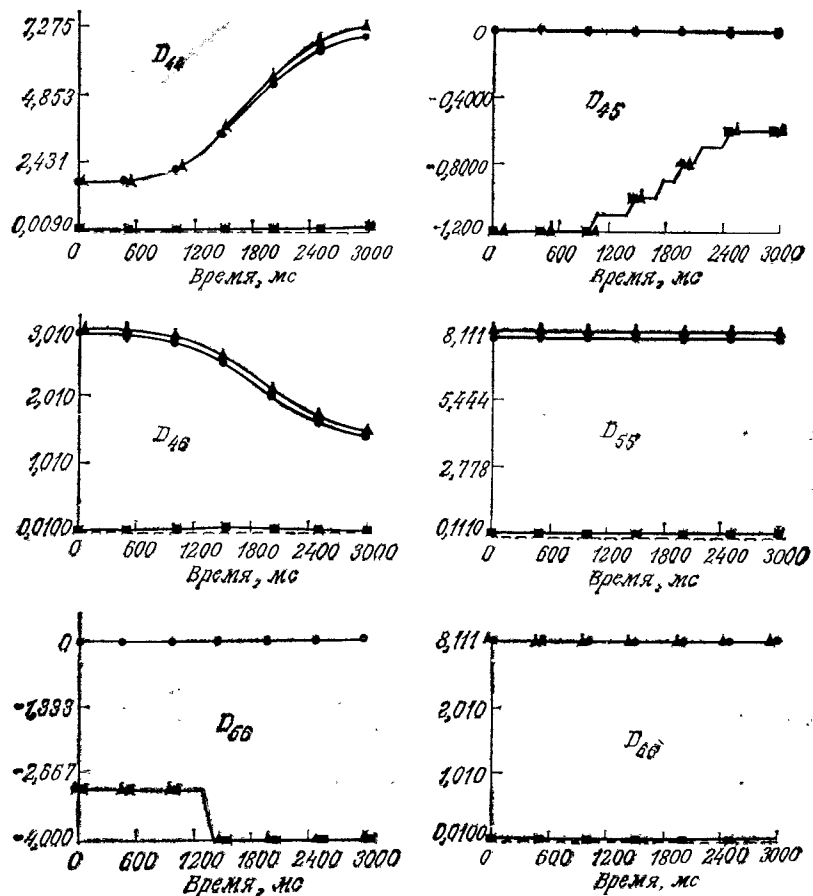


Рис. 3.10. Коэффициенты  $D_{if}$ , определяющие реакцию на ускоренное движение звеньев.

По оси ординат отложены числовые значения элементов матриц,



Продолжение рис. 3.10.

1) Влияние сил инерции, обусловленных поступательным движением звеньев, преобладает в коэффициентах  $D_{12}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{23}$ ,  $D_{33}$  и  $D_{56}$ .

2) Влияние сил инерции, обусловленных вращательным движением звеньев, преобладает в коэффициентах  $D_{44}$ ,  $D_{46}$ ,  $D_{55}$  и  $D_{66}$ .

3) В остальных элементах матрицы  $D$  составляющие, обусловленные вращательным и поступательным движением, равноценны. На рис. 3.10 графики, показывающие поведение коэффициентов  $D_{56}^{\text{пост}}$  и  $D_{45}^{\text{пост}}$ , имеют разрывы. Это связано с ошибками округления, возникающими при моделировании на ком-

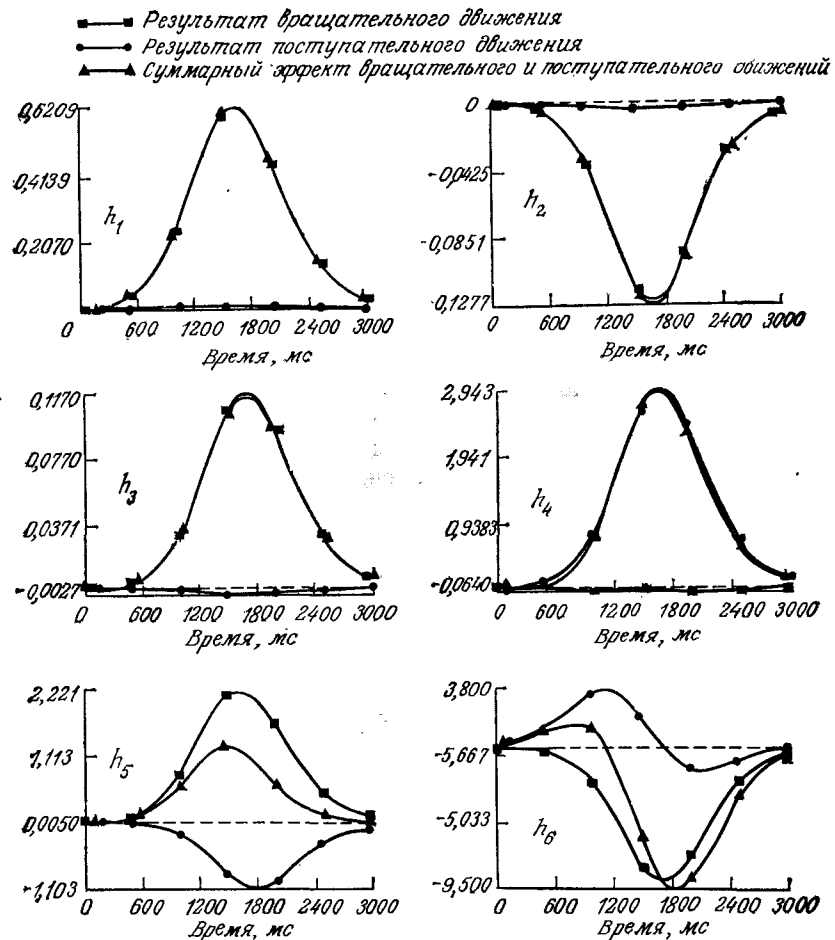


Рис. 3.11. Слагаемые  $h_i$ , обусловленные кориолисовым и центробежным ускорениями.

По оси ординат отложены числовые значения элементов матриц.

пьютере VAX-11/780. Величины этих коэффициентов очень малы по сравнению с коэффициентами, характеризующими влияние сил инерции, обусловленных вращательным движением звеньев. Анализ графиков, приведенных на рис. 3.11, позволяет сделать следующие выводы:

1) Вращательные составляющие преобладают в коэффициентах  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ .

2) Поступательная составляющая вносит определяющий вклад в коэффициент  $h_4$ .

3) Вклады вращательной и поступательной составляющих в коэффициенты  $h_5$  и  $h_6$  равноценны.

Сделанные выводы справедливы для конкретной рассмотренной траектории движения. Упрощенная модель, получаемая в результате отбрасывания слагаемых, оказывающих несущественное влияние на динамику движения манипулятора, учитывает основные действующие на звенья силы и моменты и при этом требует значительно меньших вычислительных затрат, чем полная модель. Это существенно упрощает разработку законов управления манипулятором.

### 3.4.2. Пример: двухзвенный манипулятор

Запишем для двухзвенного манипулятора (рис. 3.2) обобщенные уравнения Д'Аламбера. Полагая массы звеньев равными  $m_1$  и  $m_2$  и считая, что каждое из звеньев имеет длину  $l$ , находим тензоры инерции этих звеньев

$$I_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 m_1 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 m_1 l^2 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 m_2 l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 m_2 l^2 \end{bmatrix}.$$

Требуемые матрицы поворота имеют следующий вид:

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1R_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2R_0 = {}^0R_1 {}^1R_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 \\ S_{12} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^1R_0 = ({}^0R_1)^T, \quad {}^2R_0 = ({}^0R_2)^T,$$

где  $C_i = \cos \theta_i$ ,  $S_i = \sin \theta_i$ ,  $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ,  $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

Такие характеристики манипулятора, как  $p_i^*$ ,  $\bar{c}_i$ ,  $\bar{r}_i$  и  $p_i$ , определяются следующими выражениями:

$$p_1^* = p_1 = \begin{bmatrix} l C_1 \\ l S_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2^* = \begin{bmatrix} l C_{12} \\ l S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} l(C_1 + C_{12}) \\ l(S_1 + S_{12}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{c}_1 = \bar{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} C_1 \\ \frac{l}{2} S_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} C_{12} \\ \frac{l}{2} S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{r}_2 = \begin{bmatrix} l C_1 + \frac{l}{2} C_{12} \\ l S_1 + \frac{l}{2} S_{12} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь равенством (3.4-25), находим элементы матрицы

$$D_{11} = ({}^1R_0 z_0)^T I_1 ({}^1R_0 z_0) + ({}^2R_0 z_0)^T I_2 ({}^2R_0 z_0) +$$

$$+ m_1 (z_0 \times \bar{c}_1) \cdot (z_0 \times \bar{r}_1) + m_2 [z_0 \times (p_1^* + \bar{c}_2)] \cdot (z_0 \times \bar{r}_2) =$$

$$= (0, 0, 1) I_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (0, 0, 1) I_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{l}{2} C_1 \\ \frac{l}{2} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{l}{2} C_1 \\ \frac{l}{2} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l C_1 + \frac{l}{2} C_{12} \\ l S_1 + \frac{l}{2} S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l C_1 + \frac{l}{2} C_{12} \\ l S_1 + \frac{l}{2} S_{12} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1/3 m_1 l^2 + 4/3 m_2 l^2 + C_2 m_2 l^2,$$

$$D_{12} = D_{21} = ({}^2R_0 z_0)^T I_2 ({}^2R_0 z_1) + m_2 (z_1 \times \bar{c}_2) \cdot (z_0 \times \bar{r}_2) =$$

$$= 1/3 m_2 l^2 + 1/2 m_2 C_2 l^2,$$

$$D_{22} = ({}^2R_0 z_1)^T I_2 ({}^2R_0 z_1) + m_2 (z_1 \times \bar{c}_2) \cdot [z_1 \times (\bar{r}_2 - p_1)] =$$

$$= 1/12 m_2 l^2 + 1/4 m_2 l^2 = 1/3 m_2 l^2.$$

Таким образом,

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 m_1 l^2 + 4/3 m_2 l^2 + m_2 l^2 C_2 & 1/3 m_2 l^2 + 1/2 m_2 C_2 l^2 \\ 1/3 m_2 l^2 + 1/2 m_2 C_2 l^2 & 1/3 m_2 l^2 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления  $h_i^{\text{пост}}(\theta, \dot{\theta})$  и  $h_i^{\text{вращ}}(\theta, \dot{\theta})$  воспользуемся равенствами (3.4-26) и (3.4-27), оставив в них только те слагаемые, которые в нашем примере отличны от нуля:

$$h_1^{\text{пост}} = m_2 [\dot{\theta}_1 z_0 \times (\dot{\theta}_1 z_0 \times p_1^*)] \cdot (z_0 \times \bar{r}_2) +$$

$$+ m_1 [\dot{\theta}_1 z_0 \times (\dot{\theta}_1 z_0 \times c_1)] \cdot (z_0 \times \bar{r}_1) +$$

$$+ m_2 [(\dot{\theta}_1 z_0 + \dot{\theta}_2 z_1) \times [(\dot{\theta}_1 z_0 + \dot{\theta}_2 z_1) \times c_2]] +$$

$$+ (\dot{\theta}_1 z_0 \times \dot{\theta}_2 z_1) \times \bar{c}_2] \cdot (z_0 \times \bar{r}_2) = 1/2 m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_1^2 -$$

$$- 1/2 m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_1^2 - 1/2 m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 l^2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2,$$

$$h_1^{\text{вращ}} = ({}^1\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 \times \dot{\theta}_1 {}^1\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0)^T \mathbf{I}_1 (\dot{\theta}_1 {}^1\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0) + ({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0)^T \mathbf{I}_2 (\dot{\theta}_1 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 \times \dot{\theta}_2 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1) + \\ + [{}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 \times (\dot{\theta}_1 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 + \dot{\theta}_2 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1)]^T \mathbf{I}_2 (\dot{\theta}_1 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 + \dot{\theta}_2 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1) = 0.$$

Таким образом,

$$h_1 = h_1^{\text{пост}} + h_1^{\text{вращ}} = -1/2m_2l^2S_2\dot{\theta}_2^2 - m_2l^2S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2.$$

Аналогично находим

$$h_2^{\text{пост}} = m_2 [\dot{\theta}_1 \mathbf{z}_0 \times (\dot{\theta}_1 \mathbf{z}_0 \times \mathbf{p}_1^*)] \cdot [\mathbf{z}_1 \times (\bar{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{p}_1)] + \\ + m_2 \{(\dot{\theta}_1 \mathbf{z}_0 + \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_1) \times [(\dot{\theta}_1 \mathbf{z}_0 + \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_1) \times \bar{\mathbf{c}}_2] + \\ + (\dot{\theta}_1 \mathbf{z}_0 \times \dot{\theta}_2 \mathbf{z}_1) \times \bar{\mathbf{c}}_2\} \cdot [\mathbf{z}_1 \times (\bar{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{p}_1)] = 1/2m_2l^2S_2\dot{\theta}_1^2, \\ h_2^{\text{вращ}} = ({}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1)^T \mathbf{I}_2 (\dot{\theta}_1 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 \times \dot{\theta}_2 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1) + \\ + [{}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1 \times (\dot{\theta}_1 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 + \dot{\theta}_2 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1)]^T \mathbf{I}_2 (\dot{\theta}_1 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_0 + \dot{\theta}_2 {}^2\mathbf{R}_0\mathbf{z}_1) = 0.$$

Заметим, что  $h_1^{\text{вращ}} = h_2^{\text{вращ}} = 0$ , что облегчает выбор закона управления с обратной связью.

Итак,

$$h_2 = h_2^{\text{пост}} + h_2^{\text{вращ}} = 1/2m_2l^2S_2\dot{\theta}_1^2.$$

Таким образом,

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}.$$

С помощью равенства (3.4-28) находим компоненты вектора  $\mathbf{c}$ :

$$c_1 = -\mathbf{g} \cdot [\mathbf{z}_1 \times (m_1\bar{\mathbf{r}}_1 + m_2\bar{\mathbf{r}}_2)] = (1/2m_1 + m_2)glC_1 + 1/2m_2glC_{12},$$

$$c_2 = -\mathbf{g} \cdot [\mathbf{z}_1 \times m_2(\bar{\mathbf{r}}_2 - \mathbf{p}_1)] = 1/2m_2glC_{12},$$

где  $\mathbf{g} = (0, -g, 0)^T$ . В результате приходим к следующему виду вектора  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2m_1 + m_2)glC_1 + 1/2m_2glC_{12} \\ 1/2m_2glC_{12} \end{bmatrix},$$

где  $g = 9,8062 \text{ м/с}^2$ . Найденные значения матрицы  $\mathbf{D}$  и векторов  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{c}$  приводят к следующей системе обобщенных уравнений Д'Аламбера, описывающих динамику движения рассматриваемого двухзвенного манипулятора:

$$\begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3m_1l^2 + 4/3m_2l^2 + m_2C_2l^2 & 1/3m_2l^2 + 1/2m_2C_2l^2 \\ 1/3m_2l^2 + 1/2m_2C_2l^2 & 1/3m_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2S_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ 1/2m_2S_2l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/2m_1 + m_2)glC_1 + 1/2m_2glC_{12} \\ 1/2m_2glC_{12} \end{bmatrix}.$$

## 3.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе рассмотрены три различных подхода к описанию динамики манипулятора. Уравнения Лагранжа — Эйлера позволяют получить удобную для анализа форму уравнений движения, однако без некоторых упрощений непригодны для реализации управления манипулятором в реальном времени. Метод Ньютона — Эйлера позволяет получить чрезвычайно эффективную с вычислительной точки зрения систему рекуррентных уравнений, описывающих динамику движения манипулятора, однако такая форма малоприменяема для анализа, связанного с выбором законов управления манипулятором. Обобщенные уравнения Д'Аламбера значительно более удобны для анализа, хотя и требуют более высоких вычислительных затрат. Будучи более эффективными, чем уравнения Лагранжа — Эйлера в вычислительном плане, обобщенные уравнения Д'Аламбера вместе с тем в явном виде отражают эффекты влияния вращательного и поступательного движения звеньев на динамику манипулятора. Это обуславливает целесообразность их применения при построении приближенных динамических моделей, а также при разработке возможности выбора одной из трех следующих форм представления уравнений движения манипулятора: удобной для анализа, но неэффективной в вычислительном плане (форма Лагранжа — Эйлера); эффективной с вычислительной точки зрения, но малоприменяемой для анализа (форма Ньютона — Эйлера); достаточно удобной для анализа при умеренных вычислительных затратах (обобщенные уравнения Д'Аламбера).

## Литература

Более подробно основные вопросы динамики изложены в книгах по механике [275, 50]. Вывод уравнений движения методом Лагранжа — Эйлера с применением матриц преобразования однородных координат впервые был приведен Уикером [293]. Работа [169] содержит ряд подробностей относительно вывода уравнений Лагранжа — Эйлера для шестизвенного манипулятора. В работе [16] рассмотрены вопросы динамики и управления станфордским манипулятором (JPL-манипулятором). В этой же работе описан способ построения упрощенной модели динамики движения. Используя рекуррентную природу уравнений Лагранжа, Холлербах [122] предложил способ сокращения времени вычисления обобщенных моментов методом Лагранжа — Эйлера.

Упрощения уравнений движения, полученных методом Лагранжа — Эйлера, можно достичь с помощью дифференциальных



преобразований [229], методом усеченных моделей [19], а также методом эквивалентных композиций [182]. С помощью аппарата дифференциальных преобразований можно представить частную производную однородной матрицы в виде произведения матрицы преобразования пространства и матрицы операции дифференцирования. Это позволяет существенно упростить вид матрицы  $D$ . Однако кориолисовы и центробежные составляющие  $h_{ikt}$ , содержащие частные производные второго порядка, таким способом упростить не удастся. Бьецци и Ли [19] разработали метод усеченных моделей, основанный на однородных преобразованиях и соотношениях лагранжевой динамики, а для упрощения кориолисовых и центробежных составляющих воспользовались численными методами матричного анализа. Лу и Лин [182], пользуясь уравнениями движения в форме Ньютона — Эйлера, провели численное сравнение составляющих сил и моментов, а затем, отбросив несущественные члены, перегруппировали оставшиеся составляющие таким образом, чтобы добиться «аналитичности» уравнений.

Альтернативным способом построения более эффективной с вычислительной точки зрения системы уравнений для определения обобщенных сил и моментов является использование уравнений Ньютона — Эйлера. Среди первых исследователей, воспользовавшихся рекуррентной природой уравнений Ньютона — Эйлера, были Армстронг [6], Орин и др. [223]. Лу и др. [185] усовершенствовали этот подход, перейдя к использованию скоростей, ускорений, матриц инерции, векторов положения центров масс звеньев, сил и моментов, выраженных в системах координат, связанных со звеньями. Уолкер и Орин [299] воспользовались уравнениями движения в форме Ньютона — Эйлера для моделирования движения манипулятора с помощью ЭВМ.

Хотя структуры уравнений Лагранжа — Эйлера и Ньютона — Эйлера различны, было показано [291], что уравнения в форме Лагранжа — Эйлера можно получить из уравнений в форме Ньютона — Эйлера. Силвер [268] показал эквивалентность этих двух форм с помощью тензорного анализа. Хастон и Келли [130] разработали алгоритмический способ вывода уравнений движения, удобных для реализации на ЭВМ. Ли и др. [166], основываясь на обобщенном принципе Д'Аламбера, получили уравнения движения в матрично-векторном представлении в форме, удобной для разработки алгоритмов управления. Ньюман и Тоурасис [214] и Мьюррей и Ньюман [202] разработали программное обеспечение, позволяющее формировать уравнения движения манипулятора при помощи ЭВМ. Ньюман и Тоурасис [213] построили дискретную модель динамики манипулятора.

## Упражнения

3.1. а) Каков смысл обобщенных координат манипулятора? б) Приведите пример двух различных систем обобщенных координат для манипулятора, показанного на рис. 3.12. Изобразите выбранные вами системы обобщенных координат на двух отдельных рисунках.

3.2. На рис. 3.13 изображена точка, имеющая в некоторой промежуточной системе координат  $(x_1, y_1, z_1)$  координаты  $(-1, 1, 2)$ . Система координат  $(x_1, y_1, z_1)$  движется поступательно относительно абсолютной системы координат  $(x_0, y_0, z_0)$  со скоростью, равной  $3i + 2j + 4k$ , где  $i, j, k$  — единичные векторы в направлении осей  $x_0, y_0$  и  $z_0$  соответственно. Найти ускорение указанной точки относительно абсолютной системы координат.

3.3. Положение точки, неподвижной относительно системы координат  $O^*X^*Y^*Z^*$  (разд. 3.3.1 и 3.3.2), задается в системе координат  $OXYZ$  вектором  $r(t) = 3ti + 2tj + 4tk$ , где  $i, j, k$  — единичные векторы в направлении основных осей абсолютной системы координат  $OXYZ$ . Система  $O^*X^*Y^*Z^*$  вращается относительно системы  $OXYZ$  с угловой скоростью  $\omega = (0, 0, 1)^T$ . Найти кориолисово и центростремительное ускорения.

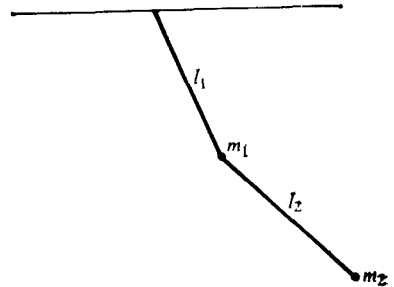


Рис. 3.12.

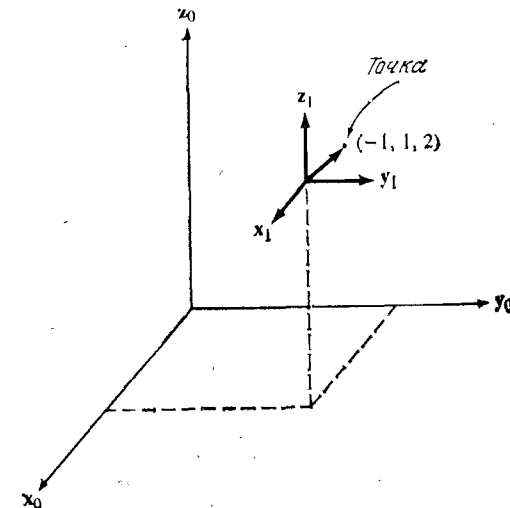


Рис. 3.13.

3.4. Чем различаются равенства (3.3-13) и (3.3-17), если а)  $h = 0$  и б)  $dh/dt = 0$ , т. е.  $h$  — постоянный вектор.

3.5. На рис. 3.14 изображен куб массой  $M$ , длина стороны которого равна  $2a$ .  $(x_0, y_0, z_0)$  — абсолютная система координат,  $(u, v, w)$  — система координат, связанная с кубом,  $(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$  — другая связанная с кубом система координат, начало которой совпадает с центром масс куба.

- а) Найти тензор инерции куба в системе координат  $(x_0, y_0, z_0)$ .  
 б) Найти тензор инерции куба относительно центра масса в системе координат  $(x_{цм}, y_{цм}, z_{цм})$ .  
 3.6. Рассмотрите упр. 3.5 для прямоугольного параллелепипеда, показанного на рис. 3.15.

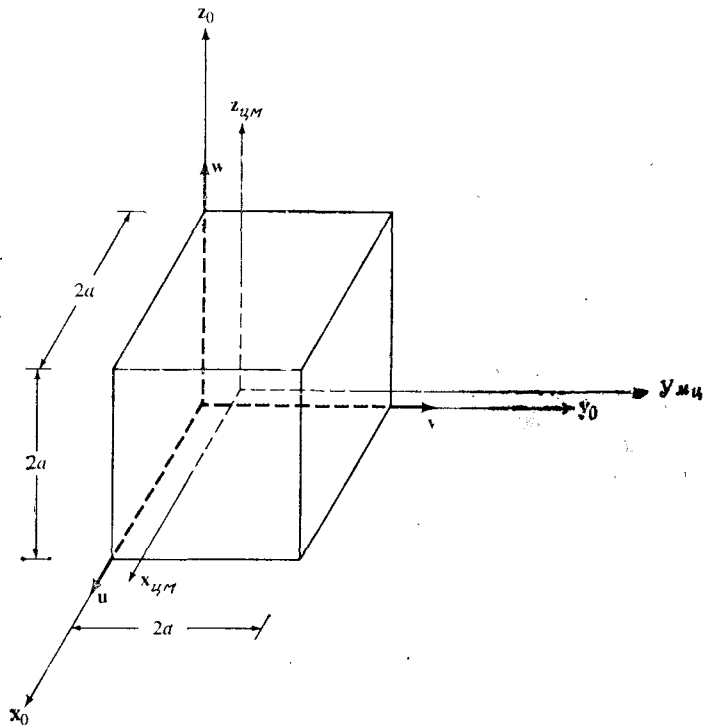


Рис. 3.14.

3.7. Предположим, что куб из упр. 3.5 был повернут на угол  $\alpha$  вокруг оси  $z_0$ , а затем на угол  $\theta$  вокруг оси  $u$ . Определите тензор инерции в системе координат  $(x_0, y_0, z_0)$ .

3.8. Рассмотрите упр. 3.7 для прямоугольного параллелепипеда из упр. 3.6.

3.9. Мы выяснили, что уравнения Ньютона — Эйлера в применении к задаче описания динамики движения манипулятора значительно более эффективны в вычислительном плане, чем уравнения Лагранжа — Эйлера. Тем не менее некоторые исследователи все-таки пользуются уравнениями Лагранжа — Эйлера. Почему? (Приведите две причины.)

3.10. Специалист в области робототехники утверждает, что если манипулятор движется очень медленно, то слагаемые, учитывающие в уравнениях Лагранжа — Эйлера кориолисовы и центробежные силы и моменты, можно опустить. Будут ли такие упрощенные уравнения более эффективны с вычислительной точки зрения, чем уравнения Ньютона — Эйлера? Обоснуйте свой ответ.

3.11. В этой главе нами рассмотрены два различных способа описания динамики движения манипулятора, а именно уравнения Лагранжа — Эйлера и уравнения Ньютона — Эйлера. Поскольку и те и другие описывают одну и ту же физическую систему, они должны быть эквивалентны. С помощью уравнений Лагранжа — Эйлера в заданной точке  $(q^d(t_1), \dot{q}^d(t_1), \ddot{q}^d(t_1))$  траектории манипулятора, соответствующей моменту времени  $t_1$ , можно определить матрицу  $D(q^d(t_1))$  и векторы  $h(q^d(t_1), \dot{q}^d(t_1))$ ,  $c(q^d(t_1))$ . Попробуйте

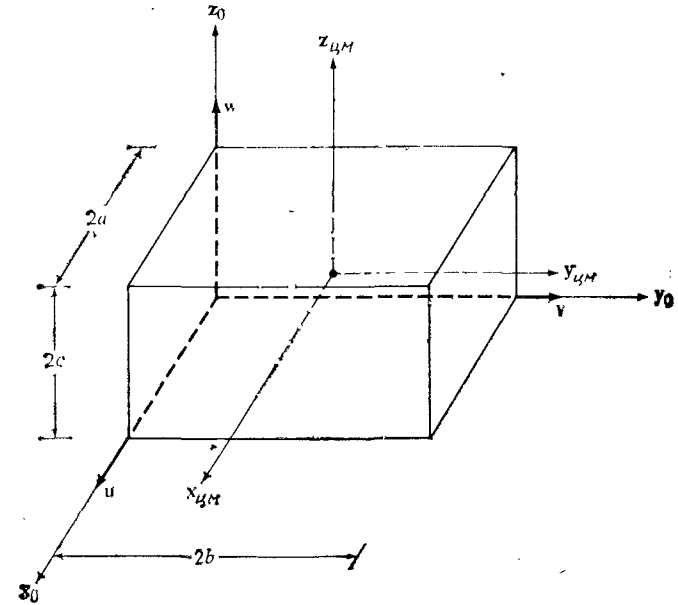


Рис. 3.15.

сформулировать алгоритм нахождения этих же характеристик в этой же самой точке траектории с помощью уравнений Ньютона — Эйлера, не используя уравнений Лагранжа — Эйлера.

3.12. Решением упр. 3.11 является метод зондирования. Предположим, что для вычисления управляющих моментов некоторого манипулятора требуется выполнить  $N$  операций умножения и  $M$  операций сложения. Зная  $M$ ,  $N$  и  $n$ , определите минимальное число сложений и умножений, необходимых для вычисления матрицы  $D(q)$ . Здесь  $n$  — число звеньев манипулятора.

3.13. В уравнениях движения манипулятора, полученных методом Лагранжа — Эйлера, вектор силы тяжести  $g$  представляет собой вектор-строку вида  $(0, 0, -|g|, 0)$ , где отрицательный знак соответствует земной системе координат. В уравнениях Ньютона — Эйлера в соответствии с табл. 3.2 влияющие силы тяжести учитывается в земной системе вектором  $(0, 0, |g|)^T$ , и здесь знак «—» отсутствует. Объясните это противоречие.

3.14. В рекуррентные уравнения Ньютона — Эйлера входит матрица  $({}^i R_0 I_i {}^0 R_i)$ , представляющая собой тензор инерции  $i$ -го звена в  $i$ -й системе координат. Найдите связь между этой матрицей и матрицей инерции  $J_i$ , входящей в уравнения Лагранжа — Эйлера.

3.15. Сравните отличия между представлениями угловой скорости и кинетической энергии в уравнениях Лагранжа — Эйлера и Ньютона — Эйлера, заполнив следующую таблицу:

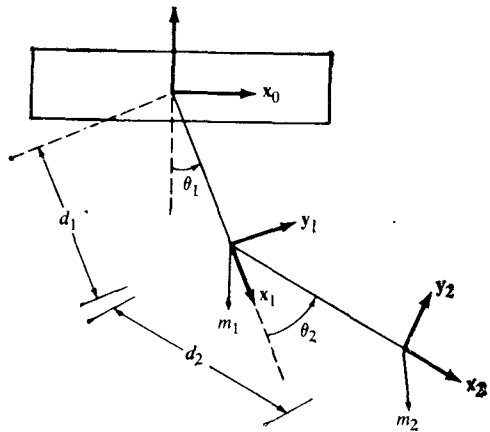


Рис. 3.16.

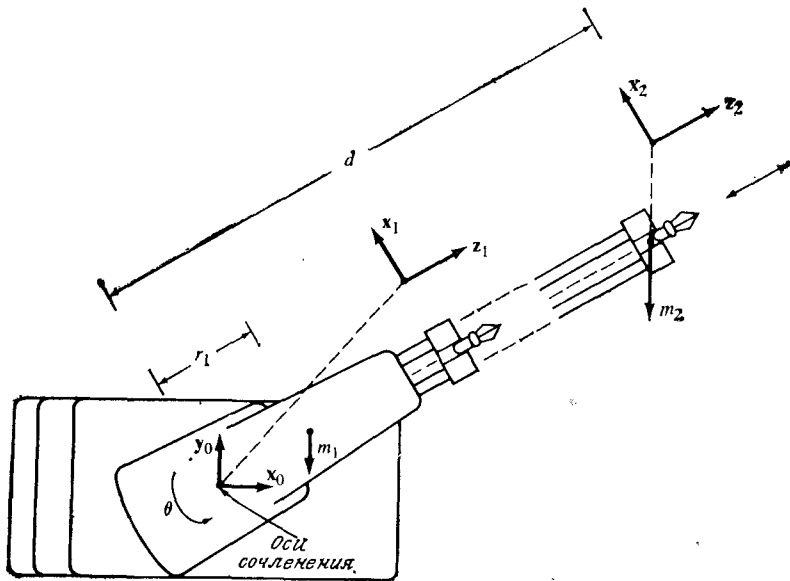


Рис. 3.17.

	Метод Лагранжа — Эйлера	Метод Ньютона — Эйлера
Угловая скорость		
Кинетическая энергия		

3.16. Двухзвенный манипулятор, показанный на рис. 3.16, прикреплен к потолку и находится под действием силы тяжести ( $g = 9,8062 \text{ м/с}^2$ );  $(x_0, y_0, z_0)$  — абсолютная система координат;  $\theta_1, \theta_2$  — обобщенные координаты;  $d_1, d_2$  — длины звеньев;  $m_1, m_2$  — массы звеньев. Будем считать, что масса каждого из звеньев сосредоточена в крайней точке звена.

а) Найдите матрицы  ${}^{i-1}A_i, i = 1, 2$ .

б) Найдите матрицу инерции  $J_i$  для каждого звена.

в) Получите уравнения Лагранжа — Эйлера для этого манипулятора, предварительно определив элементы матриц  $D(\theta), h(\theta, \dot{\theta})$  и  $c(\theta)$ .

3.17. Рассматривая манипулятор из упр. 3.16, сделайте следующие шаги вывода уравнений Ньютона — Эйлера.

а) Укажите начальные условия для рекуррентных уравнений Ньютона — Эйлера.

б) Найдите тензор инерции  ${}^iR_0 I_i {}^0R_i$  для каждого звена.

в) Найдите остальные параметры, такие, как  ${}^iR_0 s_i$  и  ${}^iR_0 p_i^*$ , используемые в уравнениях Ньютона — Эйлера.

г) Получите уравнения Ньютона — Эйлера для рассматриваемого манипулятора, полагая, что  $I_{n+1}$  и  $p_{n+1}$  имеют нулевые значения.

3.18. Воспользуйтесь уравнениями Лагранжа — Эйлера для описания динамики движения двухзвенного манипулятора, показанного на рис. 3.17. Здесь  $(x_0, y_0, z_0)$  — абсолютная система координат;  $\theta$  и  $d$  — обобщенные координаты;  $m_1, m_2$  — массы звеньев. Предполагается, что масса  $m_1$  1-го звена расположена в точке, находящейся на постоянном расстоянии  $r_1$  от оси вращения 1-го сочленения, а масса  $m_2$  2-го звена сосредоточена в крайней точке 2-го звена.

## Глава 4. ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ МАНИПУЛЯТОРА

Какая путаница! Но как она спланирована!

Александр Поп

### 4.1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрев в предыдущих главах вопросы кинематики и динамики манипулятора, обратимся теперь к задаче выбора закона управления, обеспечивающего движение манипулятора вдоль некоторой заданной траектории. Перед началом движения манипулятора важно знать, во-первых, существуют ли на его пути какие-либо препятствия, и, во-вторых, накладываются ли какие-либо ограничения на траекторию схвата. В зависимости от ответов на эти два вопроса закон управления манипулятором принадлежит к одному из четырех типов, указанных в табл. 4.1. Из таблицы видно, что задача управления манипулятором распадается на две взаимосвязанные подзадачи — выбор (планирование) траектории и осуществление движения манипулятора вдоль выбранной траектории. В этой главе рассмотрены различные способы планирования траекторий манипулятора при отсутствии

Таблица 4.1. Типы управления манипулятором

		Препятствия на пути манипулятора	
		присутствуют	отсутствуют
Ограничения на траекторию манипулятора	Присутствуют	Автономное планирование траектории, обеспечивающее обход препятствий, плюс регулирование движения вдоль выбранной траектории в процессе работы манипулятора	Автономное планирование траектории плюс регулирование движения вдоль выбранной траектории в процессе работы манипулятора
	Отсутствуют	Позиционное управление плюс обнаружение и обход препятствий в процессе движения	Позиционное управление

препятствий на пути движения. Введен формализм описания заданной траектории манипулятора в виде последовательности точек пространства, в которых заданы положение и ориентация манипулятора, и пространственной кривой, соединяющей эти точки. Кривую, вдоль которой схват манипулятора движется из начального положения в конечное, будем называть *траекторией схвата*. Наша задача состоит в разработке математического аппарата для выбора и описания желаемого движения манипулятора между начальной и конечной точками траектории.

Суть различных способов планирования траекторий манипулятора сводится к аппроксимации или интерполяции выбранной траектории полиномами некоторого класса и к выбору некоторой последовательности опорных точек, в которых производится коррекция параметров движения манипулятора на пути от начальной к конечной точке траектории. Начальная и конечная точки траектории могут быть заданы как в присоединенных, так и в декартовых координатах. Более часто, однако, используют для этого декартовы координаты, поскольку в них удобнее задавать правильное положение схвата. Кроме того, присоединенные координаты непригодны в качестве рабочей системы координат еще и потому, что оси сочленений большинства манипуляторов не ортогональны, вследствие чего невозможно независимое описание положения и ориентации схвата. Если же в начальной и конечной точках траектории требуется знание присоединенных координат, их значения можно получить с помощью программы решения обратной задачи кинематики.

Как правило, траектория, соединяющая начальное и конечное положения схвата, не единственна. Возможно, например, перемещение манипулятора как вдоль прямой, соединяющей начальную и конечную точки (прямолинейная траектория), так и вдоль некоторой гладкой кривой, удовлетворяющей ряду ограничений на положение и ориентацию схвата на начальном и конечном участках траектории (сглаженная траектория). В этой главе рассмотрен аппарат планирования как прямолинейных, так и сглаженных траекторий. Сначала мы рассмотрим наиболее простой случай планирования траекторий, удовлетворяющих некоторым ограничениям на характер движения схвата, а затем полученный способ обобщим с целью учета ограничений динамики движения манипулятора.

По смыслу планировщик траекторий можно рассматривать как «черный ящик» (рис. 4.1). На вход планировщика траекторий подаются некоторые переменные, характеризующие накладываемые на траекторию ограничения. Выходом является заданная во времени последовательность промежуточных точек, в которых определены в декартовых или присоединенных координатах положение, ориентация, скорость и ускорение схвата и через которые манипулятор должен пройти на пути от начальной к

конечной точке траектории. При планировании траекторий обычно применяется один из двух следующих подходов. Первый состоит в том, что исследователь задает точный набор ограничений (например, непрерывность и гладкость) на положение, скорость и ускорение обобщенных координат манипулятора в некоторых (называемых *узловыми*) точках траектории. Планировщик траекторий после этого выбирает из некоторого класса функций (как правило, среди многочленов, степень которых не

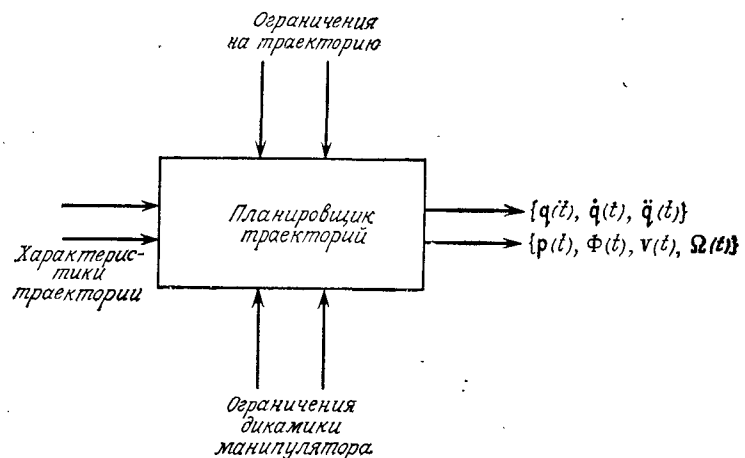


Рис. 4.1. Блок-схема планировщика траекторий.

превышает некоторое заданное  $n$ ) функцию, проходящую через узловые точки и удовлетворяющую в них заданным ограничениям. Второй подход состоит в том, что исследователь задает желаемую траекторию манипулятора в виде некоторой аналитически описываемой функции, как, например, прямолинейную траекторию в декартовых координатах. Планировщик же производит аппроксимацию заданной траектории в присоединенных или декартовых координатах. В первом подходе определение ограничений и планирование траектории производятся в присоединенных координатах. Поскольку на движение схвата никаких ограничений не накладывается, исследователю трудно представить реализуемую траекторию схвата, и поэтому возникает возможность столкновения с препятствиями, информация о наличии которых на пути схвата отсутствует. При втором подходе ограничения задаются в декартовых координатах, в то время как силовые приводы реализуют изменение присоединенных координат. Поэтому для нахождения траектории, достаточно точно аппроксимирующей заданную, с помощью приближенных функциональных преобразований переходят от ограни-

чений, заданных в декартовых координатах, к ограничениям, заданным в присоединенных координатах, и только после этого отыскивают среди функций заданного класса траекторию, удовлетворяющую ограничениям, выраженным в присоединенных координатах.

Названные выше два подхода к планированию траекторий манипулятора можно было бы использовать для эффективного (практически в реальном времени) построения последовательностей узловых точек траекторий манипулятора. Однако задаваемая во времени последовательность векторов  $\{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\}$  в пространстве присоединенных переменных формируется без учета ограничений динамики манипулятора, что может приводить к возникновению больших ошибок слежения при управлении манипулятором. Этот вопрос рассмотрен в разд. 4.4.3.

## 4.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

Планирование траекторий может производиться как в присоединенных, так и в декартовых координатах. При планировании траектории в присоединенных координатах для полного описания движения манипулятора задается зависимость от времени всех присоединенных переменных, а также их первых двух производных. Если планирование траектории ведется в декартовых координатах, задается зависимость от времени положения, скорости и ускорения схвата и по этой информации определяются значения присоединенных координат, их скоростей и ускорений. Планирование в присоединенных переменных обладает тремя преимуществами: 1) задается поведение переменных, непосредственно управляемых в процессе движения манипулятора; 2) планирование траектории может осуществляться практически в темпе реального времени; 3) траектории в присоединенных переменных легче планировать. Недостатком является сложность определения положения звеньев и схвата в процессе движения. Такая процедура часто необходима для того, чтобы избежать столкновения с препятствиями, имеющимися на пути манипулятора.

В общем случае основной алгоритм формирования узловых точек траектории в пространстве присоединенных переменных весьма прост:

$$t = t_0;$$

**цикл:** ждать следующего момента коррекции;

$$t = t + \Delta t;$$

$h(t)$  = заданное положение манипулятора в пространстве присоединенных переменных в момент времени  $t$ ;

Если  $t = t_f$ , выйти из процедуры;

Выполнить **цикл**;

Здесь  $\Delta(t)$  — интервал времени между двумя последовательными моментами коррекции параметров движения манипулятора.

Из приведенного выше алгоритма видно, что все вычисления производятся для определения траекторной функции  $\mathbf{h}(t)$ , которая должна обновляться в каждой точке коррекции параметров движения манипулятора. На планируемую траекторию накладываются четыре ограничения. Во-первых, узловые точки траектории должны легко вычисляться нерекуррентным способом. Во-вторых, промежуточные положения должны определяться однозначно. В-третьих, должна быть обеспечена непрерывность присоединенных координат и их двух первых производных, чтобы планируемая траектория в пространстве присоединенных переменных была гладкой. Наконец, в-четвертых, должны быть сведены к минимуму бесполезные движения типа «блуждания».

Перечисленным ограничениям удовлетворяют траектории, описываемые последовательностями полиномов. Если для описания движения некоторого, например,  $i$ -го сочленения используется последовательность  $p$  полиномов, они должны содержать  $3(p+1)$  коэффициентов, выбираемых в соответствии с начальными и конечными условиями по положению, скорости и ускорению и условием непрерывности этих характеристик на всей траектории. Если добавляется дополнительное ограничение, например задается положение в некоторой промежуточной точке траектории, то для выполнения этого условия требуется дополнительный коэффициент. Как правило, задаются два дополнительных условия по положению (вблизи начальной точки траектории и вблизи конечной), обеспечивающих безопасные направления движения на начальном и конечном участках траектории и более высокую точность управления движением. В этом случае изменение каждой присоединенной переменной может быть описано одним полиномом седьмой степени или двумя полиномами четвертой степени и одним — третьей (4-3-4) или двумя полиномами третьей степени и одним — пятой (3-5-3), или пятью кубическими полиномами (3-3-3-3-3). Эти способы рассмотрены в следующих разделах.

Если планирование траектории производится в декартовых координатах, приведенный выше алгоритм преобразуется к следующему виду:

$$t = t_0;$$

цикл: ждать следующего момента коррекции;

$$t = t_0 + \Delta t;$$

$\mathbf{H}(t)$  = положение схвата манипулятора в декартовом пространстве в момент  $t$ ;

$\mathbf{Q}[\mathbf{H}(t)]$  = вектор присоединенных координат, соответствующих  $\mathbf{H}(t)$ ;

Если  $t = t_f$ , выйти из процедуры;

Выполнить цикл;

Здесь помимо вычисления траекторной функции  $\mathbf{H}(t)$  в каждой точке коррекции параметров движения манипулятора требуется определить значения присоединенных переменных, соответствующие вычисленному положению схвата. Матричная функция  $\mathbf{H}(t)$  описывает положение схвата манипулятора в абсолютном пространстве в момент времени  $t$  и, как показано в разд. 4.4, представляет собой матрицу преобразования однородных координат размерностью  $4 \times 4$ .

В общем случае планирование траекторий в декартовых координатах состоит из двух последовательных шагов: 1) формирование последовательности узловых точек в декартовом пространстве, расположенных вдоль планируемой траектории схвата; 2) выбор некоторого класса функций, описывающих (аппроксимирующих) участки траектории между узловыми точками в соответствии с некоторым критерием. Используемый на втором шаге критерий выбирается, как правило, с учетом применяемых впоследствии алгоритмов управления с тем, чтобы гарантировать возможность движения вдоль выбранной траектории. Существуют два основных подхода к планированию траекторий в декартовом пространстве. В первом из них большинство вычислений, оптимизация траекторий и последующее регулирование движения производятся в декартовых координатах<sup>1)</sup>. Узловые точки на заданной прямолинейной траектории в декартовом пространстве выбираются через фиксированные интервалы времени. Вычисление значений присоединенных координат в этих точках производится в процессе управления движением манипулятора. Методы описания прямолинейного движения между последовательными узловыми точками изложены в работах [181, 228, 282]. Второй подход состоит в аппроксимации прямолинейных участков траектории в декартовом пространстве траекториями в пространстве присоединенных переменных, полученными в результате интерполяции траектории между соседними узловыми точками полиномами низкой степени. Регулирование движения в этом подходе производится на уровне присоединенных переменных<sup>2)</sup>. И предложенный Тейлором [282] метод построения траекторий с ограниченными отклонениями, и разработанный Лином метод описания траекторий кубическими сплайнами [172] используют аппроксимацию прямолинейной траектории полиномами низкой степени в пространстве присоединенных переменных.

<sup>1)</sup> Подаваемый на привод управляющий сигнал вычисляется по рассогласованию между текущим и заданным положениями схвата в декартовом пространстве.

<sup>2)</sup> Подаваемый на привод управляющий сигнал вычисляется по рассогласованию между текущим и заданным положениями манипулятора в пространстве присоединенных координат.

Первый из названных выше подходов к планированию траекторий в декартовом пространстве позволяет обеспечить высокую точность движения вдоль заданной траектории. Однако все известные алгоритмы управления движением строятся с учетом отсутствия датчиков, измеряющих положение схвата в декартовом пространстве, в пространстве присоединенных переменных. Это приводит к необходимости производить преобразование декартовых координат схвата в вектор присоединенных координат манипулятора в процессе движения — задача, требующая большого количества вычислений и нередко увеличивающая время управления манипулятором. Кроме того, переход от декартовых к присоединенным координатам плохо обусловлен из-за отсутствия взаимно-однозначного соответствия между этими координатами. Далее, требования к траектории (непрерывность, гладкость, граничные условия) формулируются в декартовых координатах, в то время как ограничения динамики, подлежащие учету на этапе планирования траектории, задаются в пространстве присоединенных переменных. В результате приходится решать задачу оптимизации с ограничениями, заданными в различных системах координат.

Перечисленные недостатки первого подхода приводят к тому, что более широко используется второй подход, основанный на преобразовании декартовых координат узловых точек в соответствующие присоединенные координаты с последующим проведением интерполяции в пространстве присоединенных переменных полиномами низкой степени. Этот подход обеспечивает меньшие (по сравнению с первым) вычислительные затраты и облегчает учет ограничений динамики манипулятора. Однако точность движения вдоль заданной в декартовом пространстве траектории при этом снижается. В разд. 4.4 мы рассмотрим несколько схем планирования траекторий, использующих указанные подходы.

### 4.3. СГЛАЖЕННЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

При управлении манипулятором, прежде чем приступить к планированию траектории движения, необходимо определить конфигурации манипулятора в начальной и конечной точках траектории. Планирование сглаженных траекторий в пространстве присоединенных переменных следует производить с учетом следующих соображений [226]:

1. В момент поднятия объекта манипулирования движение схвата должно быть направлено от объекта; в противном случае может произойти столкновение схвата с поверхностью, на которой расположен объект.

2. Если задать точку ухода на проходящей через начальное положение схвата нормали к поверхности, на которой расположен объект, и потребовать, чтобы траектория схвата проходила через эту точку, тем самым будет задано допустимое движение ухода. Задавая время, за которое схват попадет в эту точку, можно управлять скоростью движения схвата на начальном участке (участке ухода).

3. Аналогичные условия можно сформулировать для участка подхода к заданному конечному положению: схват должен

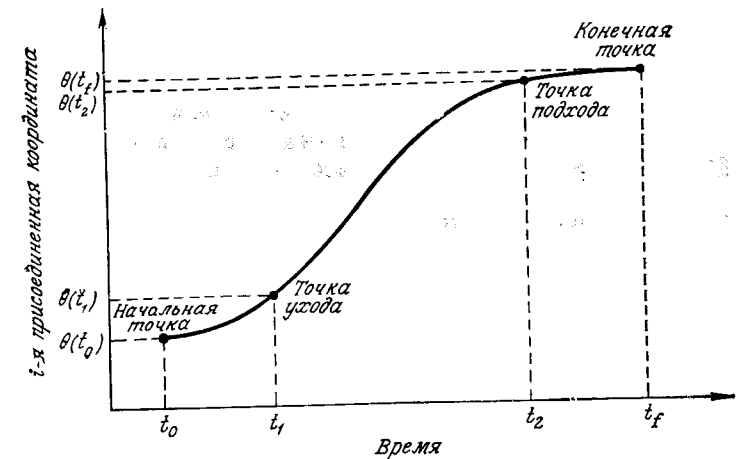


Рис. 4.2. Ограничения по положению для траектории в пространстве присоединенных переменных.

пройти через точку подхода, расположенную на проходящей через конечное положение схвата нормали к поверхности, на которую должен быть помещен объект манипулирования. Это обеспечит правильное направление движения на конечном участке траектории (участке подхода).

4. Из сказанного следует, что любая траектория движения манипулятора должна проходить через четыре заданные точки: начальную точку, точку ухода, точку подхода и конечную точку (рис. 4.2).

5. На траекторию накладываются условия:

- а) начальная точка: заданы скорость и ускорение (обычно нулевые);
- б) точка ухода: непрерывность положения, скорости и ускорения;
- в) точка подхода: то же, что и для точки ухода;
- г) конечная точка: заданы скорость и ускорение (обычно нулевые).

6. Значения присоединенных координат должны лежать в пределах физических и геометрических ограничений каждого из сочленений манипулятора.

7. При определении времени движения необходимо учесть следующее:

а) время прохождения начального и конечного участков траектории выбирается с учетом требуемой скорости подхода и ухода схвата и представляет собой некоторую константу, зависящую от характеристик силовых приводов сочленений,

б) время движения по среднему участку траектории определяется максимальными значениями присоединенных скоростей и ускорений каждого из сочленений. Для нормировки используется максимальное время, необходимое для прохождения этого участка траектории наиболее медленным сочленением.

Условия, которым должна удовлетворять типичная сглаженная траектория в пространстве присоединенных переменных, перечислены в табл. 4.2. Требуется выбрать некоторый класс полиномиальных функций степени не выше  $n$ , позволяющих производить интерполяцию траектории по заданным узловым точкам (начальная точка, точка ухода, точка подхода, конечная точка), обеспечивающую выполнение условия непрерывности положения, скорости и ускорения на всем интервале времени  $[t_0, t_f]$ . Один из способов состоит в том, чтобы описать движе-

Таблица 4.2. Ограничения на траекторию в пространстве присоединенных переменных

Начальная точка:

1. Положение (задано).
2. Скорость (задана; обычно нулевая).
3. Ускорение (задано; обычно нулевое).

Промежуточные точки:

4. Положение в точке ухода (задано).
5. Положение в точке ухода (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
6. Скорость (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
7. Ускорение (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
8. Положение в точке подхода (задано).
9. Положение в точке подхода (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
10. Скорость (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).
11. Ускорение (изменяется непрерывно при переходе между последовательными участками траектории).

Конечная точка:

12. Положение (задано).
13. Скорость (задана; обычно нулевая).
14. Ускорение (задано; обычно нулевое).

ние  $i$ -го сочленения полиномом седьмой степени

$$q_i(t) = a_7 t^7 + a_6 t^6 + a_5 t^5 + a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \quad (4.3-1)$$

в котором неизвестные коэффициенты  $a_j$  определяются из заданных граничных условий и условий непрерывности. Однако использование такого полинома высокой степени обладает целым рядом недостатков. В частности, представляет трудность определение его экстремальных значений. Кроме того, интерполяция полиномами высокой степени подвержена возникновению «бугорков» интерполирующей функции, обуславливающих бесполезные движения манипулятора. Альтернативный подход состоит в том, чтобы разбить траекторию движения на несколько участков и каждый из этих участков интерполировать полиномом низкой степени. Существуют различные способы разбиения траектории на участки, каждый из которых обладает достоинствами и недостатками. Наиболее распространены следующие способы:

**4-3-4-траектории.** Траектория изменения каждой присоединенной переменной разбивается на три участка. Первый участок, задающий движение между начальной точкой и точкой ухода, описывается полиномом четвертой степени. Вторым (средним) участком траектории между точкой ухода и точкой подхода описывается полиномом третьей степени. Последний участок траектории между точкой подхода и конечной точкой описывается полиномом четвертой степени.

**3-5-3-траектории.** Разбиение траектории на участки производится так же, как для 4-3-4-траекторий, но используются другие полиномы: первый участок описывается полиномом третьей степени, второй участок — полиномом пятой степени, последний участок — полиномом третьей степени.

**Кубический сплайн.** Используется кубический сплайн при разбиении траектории на пять участков.

Заметим, что все предыдущие рассуждения относятся к описанию траектории каждой присоединенной переменной, т. е. на три или на пять участков разбивается траектория каждой присоединенной переменной. Следовательно, число полиномов, используемых для полного описания 4-3-4-траектории  $N$ -звенного манипулятора, равно  $N \times 3 = 3N$ , а число подлежащих определению коэффициентов равно  $7N$ . При этом требуется еще определить экстремумы для всех  $3N$  участков траекторий. В следующем разделе мы рассмотрим схемы планирования 4-3-4-траекторий и траекторий, задаваемых кубическими сплайнами.

#### 4.3.1. Расчет 4-3-4-траектории

В связи с тем, что для каждого участка траектории требуется определить  $N$  траекторий присоединенных переменных, удобно воспользоваться нормированным временем  $t \in [0, 1]$ .



Это позволяет достичь единообразия уравнений, описывающих изменение каждой из присоединенных переменных на каждом участке траектории. При этом нормированное время будет изменяться от  $t=0$  (начальный момент для каждого из участков траектории) до  $t=1$  (конечный момент для каждого из участков траектории). Введем следующие обозначения:

$t$  — нормированное время,  $t \in [0, 1]$ ;  $\tau$  — реальное время, измеряемое в секундах;  $\tau_i$  — момент (в реальном времени) окончания  $i$ -го участка траектории;  $t_i = \tau_i - \tau_{i-1}$  — интервал реального времени, затрачиваемый на прохождение  $i$ -го участка траектории;

$$t = \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}}; \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]; \quad t \in [0, 1].$$

Траектория движения  $j$ -й присоединенной переменной задается в виде последовательности полиномов  $h_i(t)$ . На каждом участке траектории для каждой присоединенной переменной используются полиномы, выраженные в нормированном времени, имеют вид

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10} \quad (1\text{-й участок}), \quad (4.3-2)$$

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20} \quad (2\text{-й участок}), \quad (4.3-3)$$

$$h_n(t) = a_{n4}t^4 + a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0} \quad (\text{последний участок}). \quad (4.3-4)$$

Индекс у переменной, стоящей в левой части каждого из равенств, обозначает номер участка траектории;  $n$ -й участок — последний. Индексы в обозначении неизвестных коэффициентов  $a_{ji}$  имеют следующий смысл:  $i$ -й коэффициент для  $j$ -го участка траектории рассматриваемой присоединенной переменной. Граничные условия, которым должна удовлетворять выбранная система полиномов, следующие:

1. Начальное положение  $= \theta_0 = \theta(t_0)$ .
2. Значение начальной скорости  $= v_0$  (обычно нулевое).
3. Значение начального ускорения  $= a_0$  (обычно нулевое).
4. Положение в точке ухода  $= \theta_1 = \theta(t_1)$ .
5. Непрерывность по положению в момент  $t_1$  (т. е.  $\theta(t_1^-) = \theta(t_1^+)$ ).
6. Непрерывность по скорости в момент  $t_1$  (т. е.  $v(t_1^-) = v(t_1^+)$ ).
7. Непрерывность по ускорению в момент  $t_1$  (т. е.  $a(t_1^-) = a(t_1^+)$ ).
8. Положение в точке  $= \theta_2 = \theta(t_2)$ .
9. Непрерывность по положению в момент  $t_2$  (т. е.  $\theta(t_2^-) = \theta(t_2^+)$ ).
10. Непрерывность по скорости в момент  $t_2$  (т. е.  $v(t_2^-) = v(t_2^+)$ ).

11. Непрерывность по ускорению в момент  $t_2$  (т. е.  $a(t_2^-) = a(t_2^+)$ ).

12. Конечное положение  $= \theta_f = \theta(t_f)$ .

13. Значение конечной скорости  $= v_f$  (обычно нулевое).

14. Значение конечного ускорения  $= a_f$  (обычно нулевое).

Граничные условия для 4-3-4-траекторий показаны на рис. 4.3. Первую и вторую производные рассматриваемых поли-

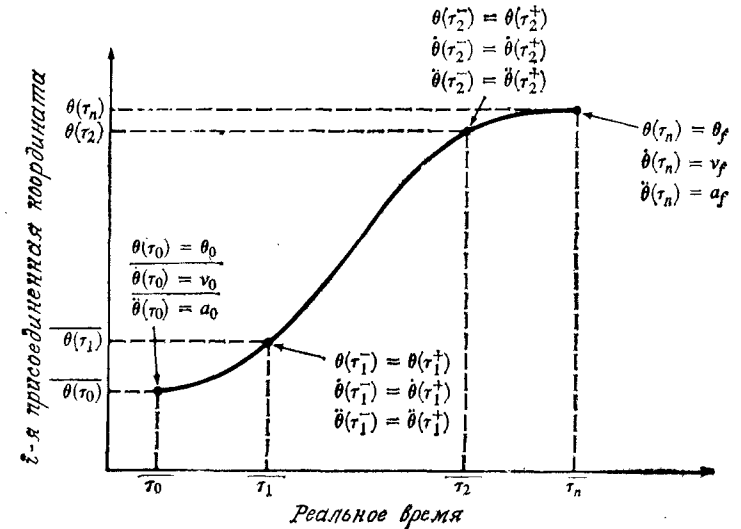


Рис. 4.3. Граничные условия для 4-3-4-траекторий в пространстве присоединенных переменных.

номов относительно реального времени можно представить в следующем виде:

$$v_i(t) = \frac{dh_i(t)}{d\tau} = \frac{dh_i(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} \cdot \frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{1}{t_i} \frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{1}{t_i} \dot{h}_i(t), \quad i = 1, 2, n; \quad (4.3-5)$$

$$a_i(t) = \frac{d^2h_i(t)}{d\tau^2} = \frac{1}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} \frac{d^2h_i(t)}{dt^2} = \frac{1}{t_i^2} \frac{d^2h_i(t)}{dt^2} = \frac{1}{t_i^2} \ddot{h}_i(t), \quad i = 1, 2, n. \quad (4.3-6)$$

Для описания первого участка траектории используется полином четвертой степени

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.3-7)$$

С учетом равенств (4.3-5) и (4.3-6) скорость и ускорение на этом участке имеют вид

$$v_1(t) = \frac{\dot{h}_1(t)}{t_1} = \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1}, \quad (4.3-8)$$

$$a_1(t) = \frac{\ddot{h}_1(t)}{t_1^2} = \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2}. \quad (4.3-9)$$

1. Для  $t=0$  (начальная точка данного участка траектории). Из граничных условий в этой точке следует

$$a_{10} = h_1(0) = \theta_0 \quad (\theta_0 - \text{задано}), \quad (4.3-10)$$

$$v_0 = \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \left[ \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1} \right]_{t=0} = \frac{a_{11}}{t_1}. \quad (4.3-11)$$

Отсюда имеем  $a_{11} = v_0 t_1$  и

$$a_0 = \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \left[ \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2} \right]_{t=0} = \frac{2a_{12}}{t_1^2}, \quad (4.3-12)$$

что позволяет получить  $a_{12} = \frac{a_0 t_1^2}{2}$ .

Подставляя найденные значения коэффициентов в равенство (4.3-7), получим

$$h_1(t) = a_{14}t^4 + a_{13}t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1)t + \theta_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.3-13)$$

2. Для  $t=1$  (конечная точка данного участка траектории). В этой точке мы ослабим накладываемые граничные условия, сняв требование точного прохождения траектории через заданное положение, но оставив условия непрерывности по скорости и ускорению. Эти условия означают, что скорость и ускорение в конце первого участка траектории должны совпадать со скоростью и ускорением в начале второго участка. В конце первого участка скорость и ускорение соответственно равны

$$v_1(1) \triangleq v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{4a_{14} + 3a_{13} + a_0 t_1^2 + v_0 t_1}{t_1}, \quad (4.3-14)$$

$$a_1(1) \triangleq a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{12a_{14} + 6a_{13} + a_0 t_1^2}{t_1^2}. \quad (4.3-15)$$

Для описания второго участка траектории используется полином третьей степени

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.3-16)$$

1. Для  $t=0$  (точка ухода). Пользуясь равенствами (4.3-5) и (4.3-6) в этой точке, имеем

$$h_2(0) = a_{20} = \theta_2(0), \quad (4.3-17)$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \left[ \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \right]_{t=0} = \frac{a_{21}}{t_2}. \quad (4.3-18)$$

Отсюда следует  $a_{21} = v_1 t_2$ ,

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \left[ \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \right]_{t=0} = \frac{2a_{22}}{t_2^2} \quad (4.3-19)$$

и, следовательно,  $a_{22} = \frac{a_1 t_2^2}{2}$ .

Поскольку скорость и ускорение в этой точке должны совпадать соответственно со скоростью и ускорением в конечной точке предыдущего участка траектории, то должны выполняться равенства

$$\frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} \quad \text{и} \quad \frac{\ddot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2}, \quad (4.3-20)$$

которые соответственно приводят к следующим условиям:

$$\left[ \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \right]_{t=0} = \left[ \frac{4a_{14}t^3 + 3a_{13}t^2 + 2a_{12}t + a_{11}}{t_1} \right]_{t=1}, \quad (4.3-21)$$

или

$$-\frac{a_{21}}{t_2} + \frac{4a_{14}}{t_1} + \frac{3a_{13}}{t_1} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1} + \frac{v_0 t_1}{t_1} = 0 \quad (4.3-22)$$

и

$$\left[ \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \right]_{t=0} = \left[ \frac{12a_{14}t^2 + 6a_{13}t + 2a_{12}}{t_1^2} \right]_{t=1}, \quad (4.3-23)$$

или

$$-\frac{2a_{22}}{t_2^2} + \frac{12a_{14}}{t_1^2} + \frac{6a_{13}}{t_1^2} + \frac{a_0 t_1^2}{t_1^2} = 0. \quad (4.3-24)$$

2. Для  $t=1$  (точка подхода). В этой точке скорость и ускорение должны совпадать со скоростью и ускорением в начальной точке следующего участка траектории. Для рассматриваемой точки имеем

$$h_2(1) = a_{23} + a_{22} + a_{21} + a_{20}, \quad (4.3-25)$$

$$v_2(1) = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \left[ \frac{3a_{23}t^2 + 2a_{22}t + a_{21}}{t_2} \right]_{t=1} = \frac{3a_{23} + 2a_{22} + a_{21}}{t_2}, \quad (4.3-26)$$

$$a_2(1) = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \left[ \frac{6a_{23}t + 2a_{22}}{t_2^2} \right]_{t=1} = \frac{6a_{23} + 2a_{22}}{t_2^2}. \quad (4.3-27)$$

Для описания *последнего участка траектории* используется полином четвертой степени

$$h_n(t) = a_{n4}t^4 + a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0}, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.3-28)$$

Если в этом равенстве заменить  $t$  на  $\bar{t} = t - 1$  и рассматривать зависимость от новой переменной  $\bar{t}$ , тем самым мы произведем сдвиг по нормированному времени: если переменная  $t$  изменяется на интервале  $[0, 1]$ , то переменная  $\bar{t}$  изменяется на интервале  $[-1, 0]$ . Равенство (4.3-28) при этом примет вид

$$h_n(\bar{t}) = a_{n4}\bar{t}^4 + a_{n3}\bar{t}^3 + a_{n2}\bar{t}^2 + a_{n1}\bar{t} + a_{n0}, \quad \bar{t} \in [-1, 0]. \quad (4.3-29)$$

Пользуясь равенствами (4.3-5) и (4.3-6), найдем скорость и ускорение на последнем участке

$$v_n(\bar{t}) = \frac{\dot{h}_n(\bar{t})}{t_n} = \frac{4a_{n4}\bar{t}^3 + 3a_{n3}\bar{t}^2 + 2a_{n2}\bar{t} + a_{n1}}{t_n}, \quad (4.3-30)$$

$$a_n(\bar{t}) = \frac{\ddot{h}_n(\bar{t})}{t_n^2} = \frac{12a_{n4}\bar{t} + 6a_{n3}\bar{t} + 2a_{n2}}{t_n^2}. \quad (4.3-31)$$

1. Для  $\bar{t} = 0$  (конечная точка рассматриваемого участка траектории). В соответствии с граничными условиями в этой точке имеем

$$h_n(0) = a_{n0} = \theta_f, \quad (4.3-32)$$

$$v_f = \frac{\dot{h}_n(0)}{t_n} = \frac{a_{n1}}{t_n}. \quad (4.3-33)$$

Отсюда следует

$$a_{n1} = v_f t_n.$$

Далее,

$$a_f = \frac{\dot{h}_n(0)}{t_n^2} = \frac{2a_{n2}}{t_n^2} \quad (4.3-34)$$

и, следовательно,

$$a_{n2} = \frac{a_f t_n^2}{2}.$$

2. Для  $\bar{t} = -1$  (начальная точка последнего участка траектории). В соответствии с граничными условиями в точке под-

хода получаем

$$h_n(-1) = a_{n4} - a_{n3} + \frac{a_f t_n^2}{2} - v_f t_n + \theta_f = \theta_2(1), \quad (4.3-35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{h}_n(-1)}{t_n} &= \left[ \frac{4a_{n4}\bar{t}^3 + 3a_{n3}\bar{t}^2 + 2a_{n2}\bar{t} + a_{n1}}{t_n} \right]_{\bar{t}=-1} = \\ &= \frac{-4a_{n4} + 3a_{n3} - a_f t_n^2 + v_f t_n}{t_n}, \end{aligned} \quad (4.3-36)$$

$$\frac{\ddot{h}_n(-1)}{t_n^2} = \left[ \frac{12a_{n4}\bar{t} + 6a_{n3}\bar{t} + 2a_{n2}}{t_n^2} \right]_{\bar{t}=-1} = \frac{12a_{n4} - 6a_{n3} + a_f t_n^2}{t_n^2}. \quad (4.3-37)$$

Условия непрерывности скорости и ускорения в точке подхода записываются следующим образом:

$$\frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{\dot{h}_n(-1)}{t_n} \quad \text{и} \quad \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_n(-1)}{t_n^2}, \quad (4.3-38)$$

или

$$\frac{4a_{n4} - 3a_{n3} + a_f t_n^2 - v_f t_n}{t_n} + \frac{3a_{23}}{t_2} + \frac{2a_{22}}{t_2} + \frac{a_{21}}{t_2} = 0 \quad (4.3-39)$$

и

$$\frac{-12a_{n4} + 6a_{n3} - a_f t_n^2}{t_n^2} + \frac{6a_{23}}{t_2^2} + \frac{2a_{22}}{t_2^2} = 0. \quad (4.3-40)$$

Приращение присоединенной переменной на каждом из участков траектории можно найти по следующим формулам:

$$\delta_1 = \theta_1 - \theta_0 = h_1(1) - h_1(0) = a_{14} + a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1, \quad (4.3-41)$$

$$\delta_2 = \theta_2 - \theta_1 = h_2(1) - h_2(0) = a_{23} + a_{22} + a_{21}, \quad (4.3-42)$$

$$\delta_n = \theta_f - \theta_2 = h_n(0) - h_n(-1) = -a_{n4} + a_{n3} - \frac{a_f t_n^2}{2} + v_f t_n. \quad (4.3-43)$$

Все неизвестные коэффициенты в полиномах, описывающих изменение присоединенной переменной, могут быть определены путем совместного решения уравнений (4.3-41), (4.3-22), (4.3-24), (4.3-42), (4.3-39) и (4.3-43). Представляя эту систему уравнений в матричной форме, получим

$$y = Cx, \quad (4.3-44)$$

где

$$\mathbf{y} = \left[ \delta_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - v_0 t_1, -a_0 t_1 - v_0, -a_0, \delta_2, \right. \\ \left. - a_f t_n + v_f, a_f, \delta_n + \frac{a_f t_n^2}{2} - v_f t_n \right]^T, \quad (4.3-45)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/t_1 & 4/t_1 & -1/t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6/t_1^2 & 12/t_1^2 & 0 & -2/t_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/t_2 & 2/t_2 & 3/t_2 & -3/t_n & 4/t_n \\ 0 & 0 & 0 & 2/t_2^2 & 6/t_2^2 & 6/t_n^2 & -12/t_n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.3-36)$$

$$\mathbf{x} = (a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{n3}, a_{n4})^T. \quad (4.3-47)$$

Таким образом, задача планирования траектории (для каждой присоединенной переменной) сводится к решению векторного уравнения (4.3-44):

$$y_i = \sum_{j=1}^7 c_{ij} x_j \quad (4.3-48)$$

или

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}. \quad (4.3-49)$$

Структура матрицы  $\mathbf{C}$  позволяет легко найти неизвестные коэффициенты. Кроме того, матрица, обратная  $\mathbf{C}$ , всегда существует, если только интервалы  $t_i$  (при  $i = 1, 2, n$ ) положительны. Решая уравнение (4.3-49), получаем все неизвестные коэффициенты полиномов, описывающих траекторию  $j$ -й присоединенной координаты.

Поскольку для полинома, описывающего последний участок траектории, нами была произведена замена, сдвигающая интервал изменения нормированного времени, то после определения коэффициентов  $a_{ni}$  из уравнения (4.3-49) необходимо произвести обратную замену, состоящую в подстановке  $\bar{t} = t - 1$ , в равенстве (4.3-29). В результате получим

$$h_n(t) = a_{n4} t^4 + (-4a_{n4} + a_{n3}) t^3 + (6a_{n4} - 3a_{n3} + a_{n2}) t^2 + \\ + (-4a_{n4} + 3a_{n3} - 2a_{n2} + a_{n1}) t + (a_{n4} - a_{n3} + a_{n2} - a_{n1} + a_{n0}), \\ t \in [0, 1]. \quad (4.3-50)$$

Окончательный вид полиномов для 4-3-4-траектории, получаемый из решения уравнения (4.3-49), представлен в табл. 4.3.

Таблица 4.3. Вид полиномов для 4-3-4-траектории

Первый участок траектории:

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} - \sigma \right] t^4 + \sigma t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0,$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{4\delta_1}{t_1} - 3v_0 - a_0 t_1 - \frac{\sigma}{t_1},$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{12\delta_1}{t_1^2} - \frac{12v_0}{t_1} - 5a_0 - \frac{6\sigma}{t_1^2}.$$

Второй участок траектории:

$$h_2(t) = \left[ \delta_2 - v_1 t_2 - \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2) t + \theta_1,$$

$$v_2 = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{3\delta_2}{t_2} - 2v_1 - \frac{a_1 t_2}{2},$$

$$a_2 = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{6\delta_2}{t_2^2} - \frac{6v_1}{t_2} - 2a_1 t_2.$$

Последний участок траектории:

$$h_n(t) = \left[ 9\delta_n - 4v_2 t_n - \frac{a_2 t_n^2}{2} - 5v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^4 + \\ + \left[ -8\delta_n + 5v_f t_n - \frac{a_f t_n^2}{2} + 3v_2 t_n \right] t^3 + \left[ \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^2 + (v_2 t_n) t + \theta_2,$$

где  $\sigma = f/g$ , и

$$f = 2\delta_1 \left[ 4 + \frac{2t_n}{t_2} + \frac{2t_n}{t_1} + \frac{3t_2}{t_1} \right] - \frac{\delta_2 t_1}{t_2} \left[ 3 + \frac{t_n}{t_2} \right] + \frac{2\delta_n t_1}{t_n} - \\ - v_0 t_1 \left[ 6 + \frac{6t_2}{t_1} + \frac{4t_n}{t_1} + \frac{3t_n}{t_2} \right] - v_f t_1 - a_0 t_1 t_n \left[ \frac{5}{3} + \frac{t_1}{t_2} + \frac{2t_1}{t_n} + \frac{5t_2}{2t_n} \right] + a_f t_1 t_n, \\ g = \frac{t_n}{t_2} + \frac{2t_n}{t_1} + 2 + \frac{3t_2}{t_1}.$$

Таблица 4.4. Вид полиномов для 3-5-3-траектории

Первый участок траектории:

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0,$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1} = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2},$$

$$a_1 = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0.$$

Второй участок траектории:

$$h_2(t) = \left[ 6\delta_2 - 3v_1t_2 - 3v_2t_2 - \frac{a_1t_2^2}{2} + \frac{a_2t_2^2}{2} \right] t^5 +$$

$$+ \left[ -15\delta_2 + 8v_1t_2 + 7v_2t_2 + \frac{3a_1t_2^2}{2} - a_2t_2^2 \right] t^4 +$$

$$+ \left[ 10\delta_2 - 6v_1t_2 - 4v_2t_2 - \frac{3a_1t_2^2}{2} + \frac{a_2t_2^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_1t_2^2}{2} \right] t^2 +$$

$$+ (v_1t_2)t + \theta_1.$$

$$v_2 = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = \frac{3\delta_2}{t_n} - 2v_f + \frac{a_f t_n}{2},$$

$$a_2 = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = \frac{-6\delta_2}{t_n^2} + \frac{6v_f}{t_n} - 2a_f.$$

Последний участок траектории:

$$h_n(t) = \left[ \delta_n - v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^3 + (-3\delta_n + 3v_f t_n - a_f t_n^2) t^2 +$$

$$+ \left[ 3\delta_n - 2v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t + \theta_2.$$

Аналогичные вычисления применяются при расчете 3-5-3-траекторий. В качестве упражнения читателю предлагается самостоятельно построить такую траекторию. Окончательный ее вид представлен в табл. 4.4.

### 4.3.2. Описание траекторий кубическими сплайнами

Интерполяция заданной функции кубическими полиномами, обеспечивающая непрерывность первых двух производных в узловых точках, называется кубическим сплайном. Такой способ интерполяции обеспечивает достаточную точность аппроксимации и гладкость аппроксимирующей функции. В общем случае сплайн представляет собой в каждой точке полином степени  $k$  с непрерывными  $k-1$  производными в узловых точках. В случае кубических сплайнов непрерывность первой производной обеспечивает непрерывность по скорости, а непрерывность второй производной означает непрерывность по ускорению. Кубические сплайны обладают целым рядом преимуществ. Во-первых, это полиномы минимальной степени, обеспечивающей непрерывность по скорости и ускорению. Во-вторых, низкая степень используемых полиномов сокращает вычислительные затраты и снижает возможность возникновения вычислительной неустойчивости.

При использовании кубических сплайнов каждый из пяти участков траектории описывается полиномом вида

$$h_j(t) = a_{j3}t^3 + a_{j2}t^2 + a_{j1}t + a_{j0} \quad (4.3-51)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, n$$

при  $\tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j$  и  $t \in [0, 1]$ .  $a_{ji}$  обозначает  $i$ -й неизвестный коэффициент, соответствующий  $j$ -му участку траектории;  $n$ -й участок траектории — последний.

Применение кубических сплайнов подразумевает наличие пяти участков траектории и шести узловых точек. Однако в наших предыдущих рассуждениях мы пользовались только четырьмя узловыми точками: начальной, точкой ухода, точкой

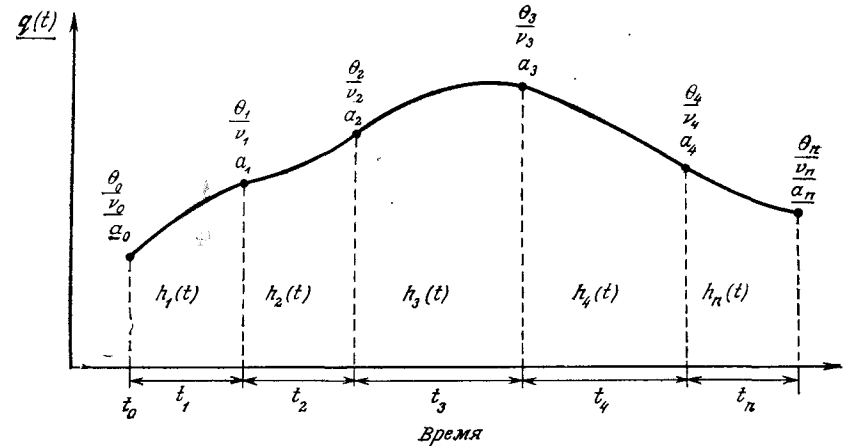


Рис. 4.4. Граничные условия для траектории, описываемой кубическим сплайном.

подхода и конечной. Таким образом, требуется задать еще две узловых точки с тем, чтобы обеспечить достаточное число граничных условий для определения неизвестных коэффициентов  $a_{ji}$ . Эти дополнительные узловые точки можно выбрать на отрезке траектории между точкой ухода и точкой подхода. Нет необходимости точно знать значения присоединенной координаты в этих точках, достаточно задать моменты времени и потребовать непрерывности скорости и ускорения. Таким образом, выбранная система интерполяционных многочленов должна удовлетворять следующим граничным условиям: 1) присоединенная координата должна принимать заданные значения в начальной точке, точке ухода, точке подхода и конечной точке; 2) скорость и ускорение должны быть непрерывны во всех узловых точках. Граничные условия для траектории, описываемой кубическим сплайном, представлены на рис. 4.4. Значения тех

переменных, которые на рисунке подчеркнуты, известны до начала расчета планируемой траектории.

Первая и вторая производные используемых полиномов по отношению к реальному времени соответственно равны

$$v_j(t) = \frac{\dot{h}_j(t)}{t_j} = \frac{3a_{j3}t^2 + 2a_{j2}t + a_{j1}}{t_j}, \quad j=1, 2, 3, 4, n, \quad (4.3-52)$$

$$a_j(t) = \frac{\ddot{h}_j(t)}{t_j^2} = \frac{6a_{j3}t + 2a_{j2}}{t_j^2}, \quad j=1, 2, 3, 4, n. \quad (4.3-53)$$

где  $t_j$  — интервал реального времени, затрачиваемый на прохождение  $j$ -го участка траектории. Заданные положение, скорость и ускорение в начальной и конечной точках траектории, а также положения в точках ухода и подхода полностью определяют коэффициенты полиномов  $h_1(t)$  и  $h_n(t)$ , описывающих начальный и конечный участки траектории. При известных  $h_1(t)$  и  $h_n(t)$  коэффициенты полиномов  $h_2(t)$ ,  $h_3(t)$ ,  $h_4(t)$  определяются из условий непрерывности в узловых точках.

Первый участок траектории описывается полиномом

$$h_1(t) = a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t + a_{10}. \quad (4.3-54)$$

При  $t=0$  в соответствии с начальными условиями имеем

$$h_1(0) = a_{10} = \theta_0 \quad (\theta_0 \text{ задано}), \quad (4.3-55)$$

$$v_0 \triangleq \frac{\dot{h}_1(0)}{t_1} = \frac{a_{11}}{t_1}. \quad (4.3-56)$$

Отсюда получаем  $a_{11} = v_0 t_1$ . Далее,

$$a_0 \triangleq \frac{\ddot{h}_1(0)}{t_1^2} = \frac{2a_{12}}{t_1^2} \quad (4.3-57)$$

и, следовательно,  $a_{12} = \frac{a_0 t_1^2}{2}$ .

При  $t=1$  в соответствии с условием, накладываемым на положение в точке ухода, имеем

$$h_1(1) = a_{13} + \frac{a_0 t_1^2}{2} + v_0 t_1 + \theta_0 = \theta_1. \quad (4.3-58)$$

Отсюда легко найти

$$a_{13} = \theta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2}, \quad (4.3-59)$$

где  $\delta_1 = \theta_1 - \theta_{1-1}$ . Таким образом, первый участок траектории полностью определен

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0. \quad (4.3-60)$$

В соответствии с выражением (4.3-60) скорость и ускорение в конечной точке первого участка траектории равны

$$\frac{h_1(1)}{t_1} \triangleq v_1 = \frac{3\delta_1 - (a_0 t_1^2)/2 - 2v_0 t_1}{t_1} = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2}, \quad (4.3-61)$$

$$\frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \triangleq a_1 = \frac{6\delta_1 - 2a_0 t_1^2 - 6v_0 t_1}{t_1^2} = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0. \quad (4.3-62)$$

Эти скорость и ускорение должны совпадать соответственно со скоростью и ускорением в начальной точке следующего участка траектории.

Последний участок траектории описывается полиномом

$$h_n(t) = a_{n3}t^3 + a_{n2}t^2 + a_{n1}t + a_{n0}. \quad (4.3-63)$$

Пользуясь граничными условиями для  $t=0$  и  $t=1$ , получаем

$$h_n(0) = a_{n0} = \theta_n \quad (\theta_n \text{ задано}), \quad (4.3-64)$$

$$h_n(1) = a_{n3} + a_{n2} + a_{n1} + \theta_n = \theta_f, \quad (4.3-65)$$

$$\frac{\dot{h}_n(1)}{t_n} \triangleq v_f = \frac{3a_{n3} + 2a_{n2} + a_{n1}}{t_n}, \quad (4.3-66)$$

$$\frac{\ddot{h}_n(1)}{t_n^2} \triangleq a_f = \frac{6a_{n3} + 2a_{n2}}{t_n^2}. \quad (4.3-67)$$

Решая эти уравнения относительно неизвестных коэффициентов  $a_{n3}$ ,  $a_{n2}$ ,  $a_{n1}$ , получаем

$$h_n(t) = \left[ \delta_n - v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^3 + (-3\delta_n + 3v_f t_n - a_f t_n^2) t^2 + \left[ 3\delta_n - 2v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t + \theta_n, \quad (4.3-68)$$

где  $\delta_n = \theta_f - \theta_n$ .

Второй участок траектории описывается полиномом

$$h_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t + a_{20}. \quad (4.3-69)$$

Из условий непрерывности по положению, скорости и ускорению в точке ухода находим

$$h_2(0) = a_{20} = \theta_1 \quad (\theta_1 \text{ — известно}), \quad (4.3-70)$$

$$v_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2} = \frac{a_{21}}{t_2} = \frac{\dot{h}_1(1)}{t_1}. \quad (4.3-71)$$

Отсюда следует  $a_{21} = v_1 t_2$ ,

$$a_1 = \frac{\dot{h}_2(0)}{t_2^2} = \frac{2a_{22}}{t_2^2} = \frac{\ddot{h}_1(1)}{t_1^2} \quad (4.3-72)$$

и, следовательно,  $a_{22} = \frac{a_1 t_2^2}{2}$ .

С учетом найденных коэффициентов можно записать

$$h_2(t) = a_{23} t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2) t + \theta_1, \quad (4.3-73)$$

где  $v_1 = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0$ .

Остается найти коэффициент  $a_{23}$ . С помощью равенства (4.3-73) найдем скорость и ускорение при  $t=1$ , которые должны совпадать соответственно со скоростью и ускорением в начальной точке следующего участка траектории:

$$h_2(1) = \theta_2 = a_{23} + \frac{a_1 t_2^2}{2} + v_1 t_2 + \theta_1, \quad (4.3-74)$$

$$\frac{\dot{h}_2(1)}{t_2} = v_2 = \frac{3a_{23} + a_1 t_2^2 + v_1 t_2}{t_2} = v_1 + a_1 t_2 + \frac{3a_{23}}{t_2}, \quad (4.3-75)$$

$$\frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2} = a_2 = \frac{6a_{23} + a_1 t_2^2}{t_2^2} = a_1 + \frac{6a_{23}}{t_2^2}. \quad (4.3-76)$$

Заметим, что каждая из величин  $\theta_2$ ,  $v_2$  и  $a_2$  зависит от значения  $a_{23}$ .

Третий участок траектории описывается полиномом

$$h_3(t) = a_{33} t^3 + a_{32} t^2 + a_{31} t + a_{30}. \quad (4.3-77)$$

В точке  $t=0$  в соответствии с условиями непрерывности по положению скорости и ускорению имеем

$$h_3(0) = a_{30} = \theta_2 = a_{23} + \frac{a_1 t_2^2}{2} + v_1 t_2 + \theta_1, \quad (4.3-78)$$

$$v_2 \triangleq \frac{\dot{h}_3(0)}{t_3} = \frac{a_{31}}{t_3} = \frac{\dot{h}_2(1)}{t_2}. \quad (4.3-79)$$

Таким образом,  $a_{31} = v_2 t_3$ .

Далее,

$$a_2 \triangleq \frac{\ddot{h}_3(0)}{t_3^2} = \frac{2a_{32}}{t_3^2} = \frac{\ddot{h}_2(1)}{t_2^2}. \quad (4.3-80)$$

Отсюда получим  $a_{32} = \frac{a_2 t_3^2}{2}$ .

Подставляя найденные значения коэффициентов в выражение (4.3-77), получаем

$$h_3(t) = a_{33} t^3 + \left[ \frac{a_2 t_3^2}{2} \right] t^2 + v_2 t_3 t + \theta_2. \quad (4.3-81)$$

Найдем в точке  $t=1$  значения скорости и ускорения, которые должны совпадать с соответствующими характеристиками в начальной точке следующего участка:

$$h_3(1) = \theta_3 = \theta_2 + v_2 t_3 + \frac{a_2 t_3^2}{2} + a_{33}, \quad (4.3-82)$$

$$\frac{\dot{h}_3(1)}{t_3} = v_3 = \frac{3a_{33} + a_2 t_3^2 + v_2 t_3}{t_3} = v_2 + a_2 t_3 + \frac{3a_{33}}{t_3}, \quad (4.3-83)$$

$$\frac{\ddot{h}_3(1)}{t_3^2} = a_3 = \frac{6a_{33} + a_2 t_3^2}{t_3^2} = a_2 + \frac{6a_{33}}{t_3^2}. \quad (4.3-84)$$

Заметим, что каждая из величин  $\theta_3$ ,  $v_3$  и  $a_3$  зависит от  $a_{33}$  и неявно зависит от  $a_{23}$ .

Четвертый участок траектории описывается полиномом

$$h_4(t) = a_{43} t^3 + a_{42} t^2 + a_{41} t + a_{40}. \quad (4.3-85)$$

Используя условия, накладываемые на положение в точке подхода, а также условия непрерывности в этой точке скорости и ускорения, получаем

$$h_4(0) = a_{40} = \theta_3 = \theta_2 + v_2 t_3 + \frac{a_2 t_3^2}{2} + a_{33}, \quad (4.3-86)$$

$$v_3 = \frac{\dot{h}_4(0)}{t_4} = \frac{a_{41}}{t_4} = \frac{\dot{h}_3(1)}{t_3}, \quad (4.3-87)$$

что дает  $a_{41} = v_3 t_4$ .

Далее,

$$a_3 = \frac{\ddot{h}_4(0)}{t_4^2} = \frac{2a_{42}}{t_4^2} = \frac{\ddot{h}_3(1)}{t_3^2}. \quad (4.3-88)$$

Отсюда получаем  $a_{42} = \frac{a_3 t_4^2}{2}$ .

Подставляя найденные выражения для коэффициентов в равенство (4.3-85), получаем

$$h_4(t) = a_{43} t^3 + \left[ \frac{a_3 t_4^2}{2} \right] t^2 + (v_3 t_4) t + \theta_3, \quad (4.3-89)$$

где  $\theta_3$ ,  $v_3$  и  $a_3$  определяются соответственно равенствами (4.3-82), (4.3-83) и (4.3-84), а коэффициенты  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  и  $a_{43}$  по-прежнему неизвестны. Их нужно найти, чтобы полностью определить полиномы, описывающие три средних участка траектории. Для этого воспользуемся условиями в граничной точке

между четвертым и последним участками траектории:

$$h_4(1) = a_{43} + \frac{a_3 t_4^2}{2} + v_3 t_4 + \theta_3 = \theta_4, \quad (4.3-90)$$

$$\frac{\dot{h}_4(1)}{t_4} = \frac{3a_{43}}{t_4} + a_3 t_4 + v_3 = v_4 = \frac{3\delta_n}{t_n} - 2v_f + \frac{a_f t_n}{2}, \quad (4.3-91)$$

$$\frac{\ddot{h}_4(1)}{t_4^2} = \frac{6a_{43}}{t_4^2} + a_3 = a_4 = \frac{-6\delta_n}{t_n^2} + \frac{6v_f}{t_n} - 2a_f. \quad (4.3-92)$$

Из этих уравнений можно найти значения неизвестных коэффициентов  $a_{23}$ ,  $a_{33}$  и  $a_{43}$ . В результате все полиномы будут полностью определены. Ниже представлен окончательный вид этих полиномов:

$$h_1(t) = \left[ \delta_1 - v_0 t_1 - \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^3 + \left[ \frac{a_0 t_1^2}{2} \right] t^2 + (v_0 t_1) t + \theta_0, \quad (4.3-93)$$

$$v_1 = \frac{3\delta_1}{t_1} - 2v_0 - \frac{a_0 t_1}{2}; \quad a_1 = \frac{6\delta_1}{t_1^2} - \frac{6v_0}{t_1} - 2a_0, \quad (4.3-94)$$

$$h_2(t) = a_{23} t^3 + \left[ \frac{a_1 t_2^2}{2} \right] t^2 + (v_1 t_2) t + \theta_1, \quad (4.3-95)$$

$$\theta_2 = a_{23} + \frac{a_1 t_2^2}{2} + v_1 t_2 + \theta_1, \quad (4.3-96)$$

$$v_2 = v_1 + a_1 t_2 + \frac{3a_{23}}{t_2}; \quad a_2 = a_1 + \frac{6a_{23}}{t_2^2}, \quad (4.3-97)$$

$$h_3(t) = a_{33} t^3 + \left[ \frac{a_2 t_3^2}{2} \right] t^2 + v_2 t_3 t + \theta_2, \quad (4.3-98)$$

$$\theta_3 = \theta_2 + v_2 t_3 + \frac{a_2 t_3^2}{2} + a_{33}, \quad (4.3-99)$$

$$v_3 = v_2 + a_2 t_3 + \frac{3a_{33}}{t_3}; \quad a_3 = a_2 + \frac{6a_{33}}{t_3^2}, \quad (4.3-100)$$

$$h_4(t) = a_{43} t^3 + \left[ \frac{a_3 t_4^2}{2} \right] t^2 + (v_3 t_4) t + \theta_3, \quad (4.3-101)$$

$$h_n(t) = \left[ \delta_n - v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t^3 + (-3\delta_n + 3v_f t_n - a_f t_n^2) t^2 + \left[ 3\delta_n - 2v_f t_n + \frac{a_f t_n^2}{2} \right] t + \theta_4, \quad (4.3-102)$$

$$v_4 = \frac{3\delta_n}{t_n} - 2v_f + \frac{a_f t_n}{2}; \quad a_4 = \frac{-6\delta_n}{t_n^2} + \frac{6v_f}{t_n} - 2a_f, \quad (4.3-103)$$

$$a_{23} = t_2^2 \frac{x_1}{D}, \quad a_{33} = t_3^2 \frac{x_2}{D}, \quad a_{43} = t_4^2 \frac{x_3}{D}, \quad (4.3-104)$$

причем

$$x_1 = k_1(u - t_2) + k_2(t_4^2 - d) - k_3[(u - t_4)d + t_4^2(t_4 - t_2)], \quad (4.3-105)$$

$$x_2 = -k_1(u + t_3) + k_2(c - t_4^2) + k_3[(u - t_4)c + t_4^2(u - t_2)], \quad (4.3-106)$$

$$x_3 = k_1(u - t_4) + k_2(d - c) + k_3[(t_4 - t_2)c - d(u - t_2)], \quad (4.3-107)$$

$$D = u(u - t_2)(u - t_4), \quad (4.3-108)$$

$$u = t_2 + t_3 + t_4, \quad (4.3-109)$$

$$k_1 = \theta_4 - \theta_1 - v_1 u - a_1 \frac{u^2}{2}, \quad (4.3-110)$$

$$k_2 = \frac{v_4 - v_1 - a_1 u - (a_4 - a_1) u/2}{3}, \quad (4.3-111)$$

$$k_3 = \frac{a_4 - a_1}{6}, \quad (4.3-112)$$

$$c = 3u^2 - 3ut_2 + t_2^2, \quad (4.3-113)$$

$$d = 3t_4^2 + 3t_3 t_4 + t_3^2. \quad (4.3-114)$$

Таким образом, показано, что, если заданы положения в начальной и конечной точках, точках ухода и подхода, а также время движения по каждому из участков траектории, тем самым полностью определен кубический сплайн, задающий закон изменения присоединенной координаты. Здесь мы рассмотрели построение кубического сплайна для траектории с пятью узловыми точками. Более общий подход к построению кубических сплайнов для траекторий с  $n$  узловыми точками рассмотрен в разд. 4.4.3.

#### 4.4. ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

В предыдущем разделе рассмотрены способы построения траекторий в пространстве присоединенных переменных, основанные на использовании интерполяционных многочленов низкого порядка. Хотя присоединенные координаты полностью определяют положение и ориентацию схвата манипулятора в декартовом пространстве, они не годятся для описания задачи, выполняемой манипулятором. Это обусловлено тем, что большинство присоединенных координат манипулятора неортогональны и не позволяют независимо изменять положение и ориентацию схвата. В робототехнических системах достаточно высокого уровня для управления манипулятором используются специальные языки программирования. В таких системах задание манипулятору обычно представляется в виде последовательности узловых точек в декартовом пространстве, через которые должен пройти схват или рабочий инструмент. В связи с этим необходим математический аппарат, позволяющий описывать



как узловые точки, через которые должен пройти схват, так и пространственную кривую (траекторию), соединяющую эти точки.

Пол [228] предложил способ планирования траекторий схвата в декартовом пространстве, состоящих из последовательности прямолинейных участков. Между прямолинейными участками траектории движение задается с помощью квадратической интерполяции полученных в результате решения обратной задачи кинематики точек в пространстве присоединенных переменных. Предложенный Полом метод был расширен и усовершенствован Тэйлором [282] за счет использования аппарата кватернионов для описания положения схвата манипулятора. Свойства кватернионов позволили упростить в вычислительном плане описание вращательного движения схвата между узловыми точками. Описание же поступательного движения никаких преимуществ по сравнению со способом Пола не имеет. Все названные подходы к планированию прямолинейных траекторий в декартовом пространстве мы рассмотрим в следующих двух разделах.

#### 4.4.1. Метод, использующий матрицу однородного преобразования

В программируемых робототехнических системах движение манипулятора может задаваться в виде последовательности узловых точек в декартовом пространстве. Каждая из этих точек описывается матрицей однородного преобразования, устанавливающей связь между системой координат схвата и абсолютной системой координат. Значения присоединенных координат, соответствующих заданным в декартовых координатах положениям схвата в узловых точках, вычисляются с помощью программы решения обратной задачи кинематики. Далее, для того чтобы осуществлять управление манипулятором, траектория между двумя последовательными узловыми точками в пространстве присоединенных переменных интерполируется квадратным полиномом. В результате управление манипулятором осуществляется таким образом, чтобы схват двигался по прямой линии, соединяющей эти точки. Преимуществом такого способа управления является возможность манипулирования движущимися объектами. Хотя положение схвата манипулятора в узловых точках полностью описывается матрицей однородного преобразования, способ движения схвата из одной точки в другую не определен. Пол [228] предложил использовать для осуществления перехода из одной узловой точки в другую прямолинейное перемещение и два поворота. Первый поворот осуществляется вокруг единичного вектора  $\mathbf{k}$  с тем, чтобы обеспечить необходимый угол подхода, а второй — вокруг оси инструмента для обеспечения его необходимой ориентации.

В общем случае положение, которое должен занять манипулятор, определяется следующим основным уравнением:

$${}^0T_6 {}^6T_{\text{инстр}} = {}^0C_{\text{база}}(t) {}^{\text{база}}P_{\text{объект}}, \quad (4.4-1)$$

где  ${}^0T_6$  — матрица однородного преобразования, имеющая размерность  $4 \times 4$  и описывающая положение и ориентацию схвата в базовой системе координат;  ${}^6T_{\text{инстр}}$  — матрица однородного преобразования, имеющая размерность  $4 \times 4$  и описывающая положение и ориентацию инструмента относительно системы координат схвата. Точнее говоря, эта матрица описывает положение рабочей части инструмента, движением которой нужно управлять;  ${}^0C_{\text{база}}(t)$  — матрица однородного преобразования, имеющая размерность  $4 \times 4$  и являющаяся функцией времени. Она описывает положение рабочей системы координат объекта манипулирования относительно базовой системы координат;  ${}^{\text{база}}P_{\text{объект}}$  — матрица однородного преобразования, имеющая размерность  $4 \times 4$  и описывающая заданные положение и ориентацию объекта манипулирования в момент захвата относительно рабочей системы координат объекта. Если матрица  ${}^6T_{\text{инстр}}$  уже включена в матрицу  ${}^0T_6$ , в уравнении (4.4-1) матрица  ${}^6T_{\text{инстр}}$  является единичной и ее можно опустить. Если рабочая система координат объекта совпадает с базовой системой координат манипулятора, то  ${}^0C_{\text{база}}(t)$  представляет собой единичную матрицу в любой момент времени.

Можно заметить, что левая часть уравнения (4.4-1) описывает положение и ориентацию схвата манипулятора в момент захвата, в то время как правая часть этого уравнения описывает положение и ориентацию подлежащей захвату части объекта манипулирования. Таким образом, мы можем определить матрицу  ${}^0T_6$ , определяющую конфигурацию манипулятора, необходимую для правильного осуществления захвата объекта в виде

$${}^0T_6 = {}^0C_{\text{база}}(t) {}^{\text{база}}P_{\text{объект}} [{}^6T_{\text{инстр}}]^{-1}. \quad (4.4-2)$$

Если было бы можно достаточно быстро вычислять элементы матрицы  ${}^0T_6$  и затем определять присоединенные переменные, этого было бы достаточно для осуществления управления манипулятором.

С использованием равенства (4.4-1) последовательность заданных положений, определяющую выполняемую манипулятором задачу, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} {}^0T_6 ({}^6T_{\text{инстр}})_1 &= [{}^0C_{\text{база}}(t)]_1 ({}^{\text{база}}P_{\text{объект}})_1, \\ {}^0T_6 ({}^6T_{\text{инстр}})_2 &= [{}^0C_{\text{база}}(t)]_2 ({}^{\text{база}}P_{\text{объект}})_2, \\ &\vdots \\ {}^0T_6 ({}^6T_{\text{инстр}})_N &= [{}^0C_{\text{база}}(t)]_N ({}^{\text{база}}P_{\text{объект}})_N. \end{aligned} \quad (4.4-3)$$

Опуская для простоты несущественные индексы, имеем

$$\begin{aligned} T_6^{\text{инстр}} T_1 &= C_1(t) P_1, \\ T_6^{\text{инстр}} T_2 &= C_2(t) P_2, \\ &\vdots \\ T_6^{\text{инстр}} T_N &= C_N(t) P_N. \end{aligned} \quad (4.4-4)$$

По заданным положениям  $C_i(t) P_i$  можно определить расстояния между последовательными точками и, если даны линейные и угловые скорости, можно вычислить интервал времени  $T_i$ , необходимый для перехода из  $i$ -го в  $(i+1)$ -е положение. Описание движения из  $i$ -го положения в  $(i+1)$ -е удобно производить, задав положение в  $i$ -й точке, относительно заданного положения в  $(i+1)$ -й точке. Обозначим как  $P_{ij}$  матрицу, определяющую заданное положение схвата в  $i$ -й точке относительно системы координат, задающей положение схвата в  $j$ -й точке. Если требуется перевести схват манипулятора из положения 1 в положение 2, то, записывая уравнение для точки 1 относительно системы координат этой точки, имеем

$$T_6^{\text{инстр}} T_1 = C_1(t) P_{11}. \quad (4.4-5)$$

Записывая уравнение для точки 1 в системе координат 2-й точки, получаем

$$T_6^{\text{инстр}} T_2 = C_2(t) P_{12}. \quad (4.4-6)$$

Из этих уравнений находим матрицу  $P_{12}$

$$P_{12} = C_2^{-1}(t) C_1(t) P_{11} (T_1^{\text{инстр}})^{-1} T_2^{\text{инстр}}. \quad (4.4-7)$$

С помощью выражения (4.4-7) можно найти  $P_{12}$ , зная  $P_{11}$ . Таким образом, движение из  $i$ -го положения в  $(i+1)$ -е можно рассматривать как переход из состояния

$$T_6 = C_{i+1}(t) P_{i,i+1} (T_{i+1}^{\text{инстр}})^{-1} \quad (4.4-8)$$

в состояние

$$T_6 = C_{i+1}(t) P_{i+1,i+1} (T_{i+1}^{\text{инстр}})^{-1}. \quad (4.4-9)$$

Пол [228] предложил простой способ перевода схвата манипулятора из одного заданного положения в другое. Движение схвата осуществлялось как композиция поступательного перемещения, поворота вокруг заданной оси и еще одного поворота вокруг оси инструмента. Первым поворотом обеспечивалось заданное направление вектора подхода. Вторым поворотом достигалась требуемая ориентация схвата.

Движение из  $i$ -го положения в  $(i+1)$ -е можно задать при помощи «ведущего» преобразования  $D(\lambda)$ , являющегося функцией нормированного времени:

$$T_6(\lambda) = C_{i+1}(\lambda) P_{i,i+1} D(\lambda) (T_{i+1}^{\text{инстр}})^{-1}, \quad (4.4-10)$$

где  $\lambda = \frac{t}{T}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $t$  — реальное время с момента начала движения вдоль данного участка траектории и  $T$  — полное время движения вдоль данного участка траектории. В  $i$ -й точке  $t=0$ ,  $\lambda=0$ ,  $D(0)$  — единичная матрица размерностью  $4 \times 4$  и

$$P_{i+1,i+1} = P_{i,i+1} D(1). \quad (4.4-11)$$

Отсюда получаем

$$D(1) = (P_{i,i+1})^{-1} (P_{i+1,i+1}). \quad (4.4-12)$$

Представляя положение схвата в точках  $i$  и  $i+1$  в виде соответствующих матриц однородных преобразований, имеем

$$P_{i,i+1} \triangleq A = \begin{bmatrix} n_A & s_A & a_A & p_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^A & s_x^A & a_x^A & p_x^A \\ n_y^A & s_y^A & a_y^A & p_y^A \\ n_z^A & s_z^A & a_z^A & p_z^A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4-13)$$

$$P_{i+1,i+1} \triangleq B = \begin{bmatrix} n_B & s_B & a_B & p_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^B & s_x^B & a_x^B & p_x^B \\ n_y^B & s_y^B & a_y^B & p_y^B \\ n_z^B & s_z^B & a_z^B & p_z^B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4-14)$$

Пользуясь равенством (2.2-27) для обращения матрицы  $P_{i,i+1}$  и произведя умножение на  $P_{i+1,i+1}$ , получаем

$$D(1) = \begin{bmatrix} n_A \cdot n_B & n_A \cdot s_B & n_A \cdot a_B & n_A \cdot (p_B - p_A) \\ s_A \cdot n_B & s_A \cdot s_B & s_A \cdot a_B & s_A \cdot (p_B - p_A) \\ a_A \cdot n_B & a_A \cdot s_B & a_A \cdot a_B & a_A \cdot (p_B - p_A) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4-15)$$

где точка означает скалярное произведение векторов.

Если ведущая функция содержит одно поступательное и два вращательных движения, то и перемещение, и повороты будут прямо пропорциональны  $\lambda$ . Если  $\lambda$  изменяется пропорционально времени, то результирующее движение, описываемое функцией  $D(\lambda)$ , представляет собой поступательное движение с постоян-

ной линейной скоростью и два вращения с постоянными угловыми скоростями. Поступательное движение описывается матрицей однородного преобразования  $L(\lambda)$ , задающей движение вдоль прямой, соединяющей точки  $P_i$  и  $P_{i+1}$ . Первое вращательное движение задается матрицей  $R_A(\lambda)$ , описывающей разворот вектора подхода из положения  $P_i$  в положение  $P_{i+1}$ . Второе вращательное движение описывается матрицей  $R_B(\lambda)$ , задающей изменение ориентации схвата от положения  $P_i$  к положению  $P_{i+1}$  за счет вращения вокруг оси инструмента. В результате ведущая функция может быть представлена в виде

$$D(\lambda) = L(\lambda) R_A(\lambda) R_B(\lambda), \quad (4.4-16)$$

где

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4-17)$$

$$R_A(\lambda) = \begin{bmatrix} S^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta) & -S\psi C\psi V(\lambda\theta) & C\psi S(\lambda\theta) & 0 \\ -S\psi C\psi V(\lambda\theta) & C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta) & S\psi S(\lambda\theta) & 0 \\ -C\psi S(\lambda\theta) & -S\psi S(\lambda\theta) & C(\lambda\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4-18)$$

$$R_B(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda\varphi) & -S(\lambda\varphi) & 0 & 0 \\ S(\lambda\varphi) & C(\lambda\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4-19)$$

где

$$\begin{aligned} V(\lambda\theta) &= 1 - \cos(\lambda\theta), \\ C(\lambda\theta) &= \cos(\lambda\theta), \quad S(\lambda\theta) = \sin(\lambda\theta), \\ C(\lambda\varphi) &= \cos(\lambda\varphi), \quad S(\lambda\varphi) = \sin(\lambda\varphi) \end{aligned} \quad (4.4-20)$$

и  $\lambda \in [0, 1]$ . Матрица поворота  $R_A(\lambda)$  описывает вращение на угол  $\theta$  вокруг вектора ориентации, соответствующего положению  $P_i$ , который повернут на угол  $\psi$  вокруг вектора подхода. Матрица  $R_B(\lambda)$  описывает вращение на угол  $\varphi$  вокруг вектора подхода, соответствующего положению  $P_{i+1}$ .

Перемножив матрицы (4.4-17)–(4.4-19), получаем

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} dn & do & da & dp \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4-21)$$

где

$$\begin{aligned} do &= \begin{bmatrix} -S(\lambda\varphi)[S^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)] + C(\lambda\varphi)[-S\psi C\psi V(\lambda\theta)] \\ -S(\lambda\varphi)[-S\psi C\psi V(\lambda\theta)] + C(\lambda\varphi)[C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)] \\ -S(\lambda\varphi)[-C\psi S(\lambda\theta)] + C(\lambda\varphi)[-S\psi S(\lambda\theta)] \end{bmatrix}, \\ da &= \begin{bmatrix} C\psi S(\lambda\theta) \\ S\psi S(\lambda\theta) \\ C(\lambda\theta) \end{bmatrix}, \quad dp = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

и

$$dn = do \times da.$$

Применяя метод обратных преобразований к равенству (4.4-16), можно определить  $x, y, z$ . Для этого нужно умножить обе части равенства (4.4-16) справа на  $R_B^{-1}(\lambda) R_A^{-1}(\lambda)$  и приравнять соответствующие элементы векторов положения

$$\begin{aligned} x &= n_A \cdot (p_B - p_A), \\ y &= s_A \cdot (p_B - p_A), \\ z &= a_A \cdot (p_B - p_A). \end{aligned} \quad (4.4-22)$$

Умножая обе части равенства (4.4-16) справа на  $R_B^{-1}(\lambda)$  и слева на  $L^{-1}(\lambda)$ , найдем из условия равенства соответствующих элементов третьего столбца значения  $\theta$  и  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \text{arctg} \left[ \frac{s_A \cdot a_B}{n_A \cdot a_B} \right], \\ -\pi &\leq \psi \leq \pi, \end{aligned} \quad (4.4-23)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \text{arctg} \left\{ \frac{[(n_A \cdot a_B)^2 + (s_A \cdot a_B)^2]^{1/2}}{a_A \cdot a_B} \right\}, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (4.4-24)$$

Чтобы найти  $\varphi$ , умножим обе части (4.4-16) слева последовательно на  $L^{-1}(\lambda)$  и  $R_A^{-1}(\lambda)$ , и, приравняв соответствующие элементы, получим

$$S\varphi = -S\psi C\psi V(\lambda\theta) (n_A \cdot n_B) + [C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)] (s_A \cdot n_B) - S\psi S(\lambda\theta) (a_A \cdot n_B), \quad (4.4-25)$$

$$C\varphi = -C\psi C\psi V(\lambda\theta) (n_A \cdot s_B) + [C^2\psi V(\lambda\theta) + C(\lambda\theta)] (s_A \cdot s_B) - S\psi S(\lambda\theta) (a_A \cdot s_B), \quad (4.4-26)$$

$$\varphi = \text{arctg} \left[ \frac{S\varphi}{C\varphi} \right], \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (4.4-27)$$

Движение между двумя участками траектории. Часто необходимо обеспечить движение манипулятора вдоль последовательности прямолинейных участков (это диктуется выполняе-

мой манипулятором задачей или наличием препятствий на его пути). Для того чтобы избежать скачков по скорости при переходе с одного участка траектории на другой, между участками нужно обеспечить движение с ускорением или торможением. Такое движение можно реализовать, начиная изменение скорости за время  $\tau$  до точки перехода между участками и поддерживая ускорение постоянным, пока не пройдет  $\tau$  единиц времени после перехода границы участков (рис. 4.5). Если

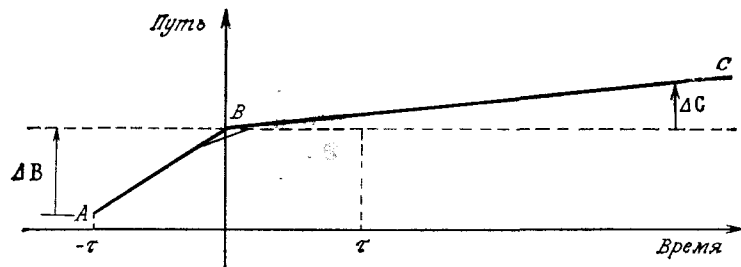


Рис. 4.5. Движение между двумя прямолинейными участками траектории.

ускорение поддерживается постоянным от момента  $-\tau$  до момента  $\tau$ , то его величина, обеспечивающая заданное изменение скорости и положения, определяется формулой

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{2\tau^2} \left[ \Delta\mathbf{C} \frac{\tau}{T} + \Delta\mathbf{B} \right], \quad (4.4-28)$$

где  $-\tau < t < \tau$ , и

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_{BC} \\ y_{BC} \\ z_{BC} \\ \theta_{BC} \\ \phi_{BC} \end{bmatrix}, \quad \Delta\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{BA} \\ y_{BA} \\ z_{BA} \\ \theta_{BA} \\ \phi_{BA} \end{bmatrix}$$

$\Delta\mathbf{C}$  и  $\Delta\mathbf{B}$  — векторы, элементами которых являются приращения декартовых координат и углов между точками  $B$  и  $C$  и между точками  $B$  и  $A$  соответственно.

В соответствии с равенством (4.4-28) скорость и положение на интервале  $-\tau < t < \tau$  определяются равенствами

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{\tau} \left[ \Delta\mathbf{C} \frac{\tau}{T} + \Delta\mathbf{B} \right] \lambda - \frac{\Delta\mathbf{B}}{\tau}, \quad (4.4-29)$$

$$\mathbf{q}(t) = \left[ \left[ \Delta\mathbf{C} \frac{\tau}{T} + \Delta\mathbf{B} \right] \lambda - 2\Delta\mathbf{B} \right] \lambda + \Delta\mathbf{B}, \quad (4.4-30)$$

где

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad \lambda \triangleq \frac{t + \tau}{2\tau}. \quad (4.4-31)$$

При  $\tau < t < T$  движение задается равенствами

$$\mathbf{q} = \Delta\mathbf{C}\lambda, \quad \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (4.4-32)$$

где

$$\lambda \triangleq \frac{t}{T}.$$

Отметим, что, как и выше,  $\lambda$  представляет собой нормированное время, изменяющееся на интервале  $[0, 1]$ . Следует помнить, однако, что нормирующий множитель различен для разных участков траектории.

Для движения от  $A$  к  $B$  и к  $C$  определим  $\psi$  на интервале  $-\tau < t < \tau$  следующим образом:

$$\psi = (\psi_{BC} - \psi_{AB})\lambda + \psi_{AB}, \quad (4.4-33)$$

где  $\psi_{AB}$  и  $\psi_{BC}$  определены для движения от  $A$  к  $B$  и от  $B$  к  $C$  формулой (4.4-23). Тем самым  $\psi$  будет изменяться от  $\psi_{AB}$  к  $\psi_{BC}$ .

Итак, для описания движения из положения  $\mathbf{P}_i$  в положение  $\mathbf{P}_{i+1}$  надо в соответствии с равенствами (4.4-16) — (4.4-27) вычислить ведущую функцию  $\mathbf{D}(\lambda)$ ; далее следует определить  $\mathbf{T}_6(\lambda)$  по формуле (4.4-10) и с помощью программы решения обратной задачи кинематики вычислить соответствующие значения присоединенных координат. При необходимости применяется квадратическая интерполяция траектории между полученными точками в пространстве присоединенных координат.

**Пример.** Двигаясь по прямолинейной траектории в декартовом пространстве, манипулятор должен переместить болт из обоймы в одно из отверстий бруска, изображенного на рис. 4.6. Запишите все необходимые матричные уравнения, задающие движение манипулятора вдоль штриховой линии, обеспечивающее выполнение поставленной задачи. Для обозначения промежуточных точек траектории можно использовать буквы.

**Решение.** Пусть  $\mathbf{P}_i$  — узловые точки траектории, через которые должен пройти схват манипулятора ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ). Матричные уравнения будут иметь следующий вид:

$$\text{в точке } \mathbf{P}_0: [\mathbf{BASE}] [\mathbf{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{INIT}] [\mathbf{P}_0], \quad (4.4-34)$$

$$\text{в точке } \mathbf{F}_2: [\mathbf{BASE}] [\mathbf{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{B0}] [\mathbf{P}_1], \quad (4.4-35)$$

$$\text{в точке } \mathbf{P}_2: [\mathbf{BASE}] [\mathbf{T6}] [\mathbf{E}] = [\mathbf{B0}] [\mathbf{P}_2], \quad (4.4-36)$$

$$\text{в точке } P_3: [\text{BASE}] [\text{T6}] [\text{E}] = [\text{B0}] [P_3], \quad (4.4-37)$$

$$\text{в точке } P_4: [\text{BASE}] [\text{T6}] [\text{E}] = [\text{BR}] [P_4], \quad (4.4-38)$$

$$\text{в точке } P_5: [\text{BASE}] [\text{T6}] [\text{E}] = [\text{BR}] [P_5], \quad (4.4-39)$$

где  $[\text{BASE}]$ ,  $[\text{INIT}]$ ,  $[\text{B0}]$ ,  $[\text{BR}]$ ,  $[\text{T6}]$ ,  $[\text{E}]$ ,  $[P_0]$ ,  $[P_1]$ ,  $[P_2]$ ,  $[P_3]$ ,  $[P_4]$ ,  $[P_5]$  — матрицы однородных преобразований, имеющие размерность  $4 \times 4$ . Матрицы  $[\text{BASE}]$ ,  $[\text{INIT}]$ ,  $[\text{B0}]$  и  $[\text{BR}]$  заданы относительно абсолютной системы координат;  $[\text{T6}]$  задана относительно базовой системы;  $[\text{E}]$  задана относительно

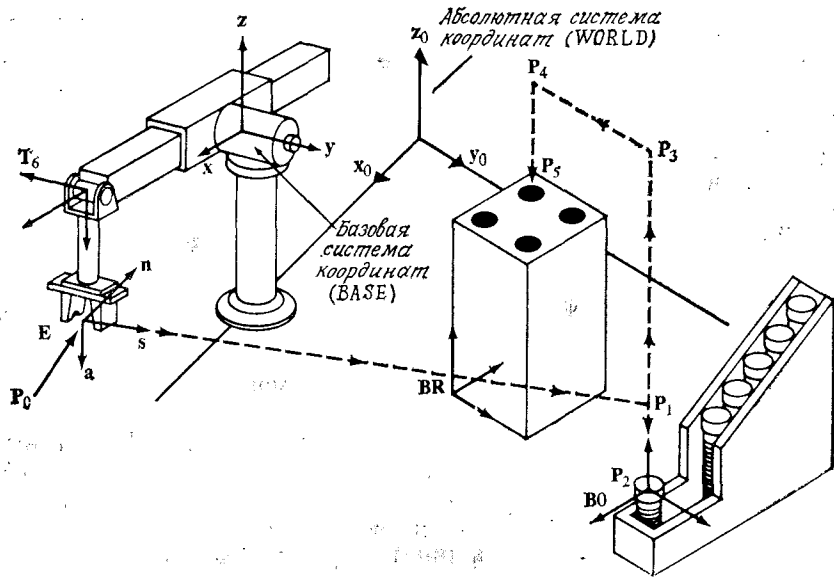


Рис. 4.6.

$[\text{T6}]$ ;  $[P_0]$  задана относительно системы  $[\text{INIT}]$ ;  $[P_1]$ ,  $[P_2]$  и  $[P_3]$  заданы относительно  $[\text{B0}]$ ;  $[P_4]$  и  $[P_5]$  заданы относительно  $[\text{BR}]$ .

Для описания движения из  $P_0$  и  $P_1$  воспользуемся двойной индексацией, чтобы записать равенство (4.4-34) в системе координат  $P_1$ . В системе координат  $P_0$  имеем

$$[\text{T6}] = [\text{BASE}]^{-1} [\text{INIT}] [P_{00}] [\text{E}]^{-1}. \quad (4.4-40)$$

Записывая это равенство в системе  $P_1$ , получаем

$$[\text{T6}] = [\text{BASE}]^{-1} [\text{B0}] [P_{01}] [\text{E}]^{-1}. \quad (4.4-41)$$

Из равенств (4.4-40) и (4.4-41) находим

$$[P_{01}] = [\text{B0}]^{-1} [\text{INIT}] [P_{00}]. \quad (4.4-42)$$

Таким образом, переход из положения  $P_0$  в положение  $P_1$  вдоль прямолинейной траектории означает изменение конфигурации манипулятора с

$$[\text{T6}] = [\text{BASE}]^{-1} [\text{B0}] [P_{01}] [\text{E}]^{-1} \quad (4.4-43a)$$

на 
$$[\text{T6}] = [\text{BASE}]^{-1} [\text{B0}] [P_{11}] [\text{E}]^{-1}. \quad (4.4-43b)$$

Переход из точки  $P_i$  в  $P_{i+1}$  для  $i=1, 2, 3, 4$  осуществляется аналогично.

#### 4.4.2. Планирование прямолинейных траекторий с использованием кватернионов

Предложенный Полом способ построения прямолинейных траекторий опирается на описание заданных положений схвата манипулятора матрицами однородных преобразований. Такое представление заданных положений удобно и наглядно. Однако оперирование с матрицами предъявляет относительно высокие требования к объему памяти, используемой для их хранения в вычислителе, и к количеству выполняемых арифметических операций. Кроме того, матричное описание операций вращения является существенно избыточным, что может привести к вычислительной неустойчивости. Вместе с тем было показано, что представление вращений с помощью кватернионов позволяет задать более эффективное и более равномерное движение. Тэйлор [282] предложил два способа построения прямолинейных участков траектории между узловыми точками. Первый из них, называемый *управлением в декартовых координатах*, является усовершенствованием метода Пола и отличается от него тем, что для описания вращений используются кватернионы. Этот способ прост и обеспечивает более равномерное угловое движение. Однако он требует большого числа вычислений в процессе управления манипулятором, и, кроме того, им нельзя пользоваться при вырожденной конфигурации манипулятора. Второй способ, называемый *способом планирования траекторий с ограниченными отклонениями*, требует дополнительного этапа планирования. На этом этапе производится выбор узловых точек в количестве, достаточном для того, чтобы траектория в пространстве присоединенных переменных между узловыми точками задавалась путем линейной интерполяции и при этом отклонения схвата от прямолинейной траектории не превышали бы заданной величины. Этот способ существенно снижает количество вычислений, необходимых на каждом участке траектории.

**Кватернионы.** В последние десятилетия аппарат кватернионов успешно применялся в задачах анализа пространственного движения механизмов. Мы воспользуемся кватернионами для упрощения описания ориентации схвата манипулятора в за-

даче планирования прямолинейной траектории. Кватернион представляет собой упорядоченную четверку вещественных чисел  $s, a, b, c$ , связанных соответственно с четырьмя базисными элементами: вещественным числом  $+1$  и тремя другими единичными элементами  $i, j, k$ , обладающими следующими свойствами:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j. \end{aligned}$$

Единичные элементы  $i, j, k$  можно рассматривать как базисные векторы декартовой системы координат в трехмерном пространстве. В этом случае кватернион  $Q$  может быть записан в виде суммы скалярной части  $s$  и векторной части  $v$ :

$$Q = [s + v] = s + ai + bj + ck = (s, a, b, c). \quad (4.4-44)$$

Следующие понятия и свойства являются основными в алгебре кватернионов:

- Скалярная часть  $Q: s$ .
- Векторная часть  $Q: ai + bj + ck$ .
- Кватернион, сопряженный  $Q: s - (ai + bj + ck)$ .
- Норма  $Q: s^2 + a^2 + b^2 + c^2$ .
- Кватернион, обратный  $Q: \frac{s - (ai + bj + ck)}{s^2 + a^2 + b^2 + c^2}$ .
- Единичный кватернион:  $s + ai + bj + ck$ , где  $s^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

Важно отметить, что подмножествами кватернионов являются вещественные числа  $(s, 0, 0, 0)$ , комплексные числа  $(s, a, 0, 0)$  и векторы трехмерного пространства  $(0, a, b, c)$ . Сложение (вычитание) двух кватернионов производится путем сложения (вычитания) всех соответствующих элементов задающей кватернион четверки чисел. Произведение двух кватернионов вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (s_1 + a_1 i + b_1 j + c_1 k)(s_2 + a_2 i + b_2 j + c_2 k) = \\ &= (s_1 s_2 - v_1 \cdot v_2 + s_2 v_1 + s_1 v_2 + v_1 \times v_2). \end{aligned} \quad (4.4-45)$$

Это выражение получается непосредственным применением распределительного закона обычной алгебры, но с учетом порядка перемножения единичных элементов. В общем случае произведение двух векторов трехмерного пространства, записанных в форме кватернионов, представляет собой не вектор, а кватернион, т. е. если  $Q_1 = [0 + v_1] = (0, a_1, b_1, c_1)$  и  $Q_2 = [0 + v_2] = (0, a_2, b_2, c_2)$ , то в соответствии с выражением (4.4-45)

$$Q_1 Q_2 = -v_1 \cdot v_2 + v_1 \times v_2.$$

Алгебра кватернионов дает простой и удобный аппарат описания конечных поворотов в трехмерном пространстве. Если ввести обозначения

$$S = \sin \left[ \frac{\theta}{2} \right], \quad C = \cos \left[ \frac{\theta}{2} \right],$$

то поворот  $\text{Rot}(n, \theta)$  на угол  $\theta$  вокруг оси  $n$  можно представить кватернионом

$$\text{Rot}(n, \theta) = \left[ \cos \left[ \frac{\theta}{2} \right] + \sin \left[ \frac{\theta}{2} \right] n \right]. \quad (4.4-46)$$

**Пример.** Поворот на  $90^\circ$  вокруг вектора  $k$ , сопровождаемый поворотом на  $90^\circ$  вокруг вектора  $j$ , можно представить в виде произведения кватернионов

$$\begin{aligned} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ)(\cos 45^\circ + k \sin 45^\circ) &= (1/2 + j/2 + k/2 + i/2) = \\ &= \left[ 1/2 + \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \left[ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \right] = \\ &= \text{Rot} \left[ \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}, 120^\circ \right]. \end{aligned}$$

Результирующим является поворот на  $120^\circ$  вокруг оси, составляющей одинаковые углы с осями  $i, j, k$ . Отметим, что результирующий поворот можно было бы определить, воспользовавшись матрицами поворотов, рассмотренными в гл. 2. Однако кватернионы дают гораздо более простую форму представления. Таким образом, для описания поворотов можно пользоваться как матрицами, так и кватернионами.

В заключение этой части раздела в табл. 4.5 приведены вычислительные затраты, необходимые для выполнения некоторых обычных операций с поворотами, при описании с помощью кватернионов и при матричном представлении.

Таблица 4.5. Вычислительные затраты при описании вращений матрицами и кватернионами

Операция	Описание с помощью кватернионов	Описание с помощью матриц
$R_1 R_2$	9 сложений, 16 умножений	15 сложений, 24 умножения
$Rv$	12 сложений, 22 умножения	6 сложений, 9 умножений
$R \rightarrow \text{Rot}(n, \theta)$	4 умножения, 1 квадратный корень, 1 арктангенс	2 квадратных корня, 8 сложений, 10 умножений, 1 арктангенс

Способ управления в декартовых координатах. За время  $T$  требуется перевести схват манипулятора из узловой точки  $F_0$

в узловую точку  $F_1$ , обеспечив прямолнейное движение. Здесь  $F_i$  ( $i = 0, 1$ ) представляет собой матрицу однородного преобразования, задающую положение системы координат схвата в узловой точке:

$$F_i = \begin{bmatrix} R_i & p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Движение вдоль выбранной траектории представляет собой поступательное перемещение точки начала системы координат схвата из положения  $p_0$  в положение  $p_1$  и одновременное вращение системы координат схвата, переводящее ее ориентацию из  $R_0$  в  $R_1$ . Пусть  $\lambda(t)$  — доля пути, которую остается пройти манипулятору в момент  $t$ . При равномерном движении имеем

$$\lambda(t) = \frac{T-t}{T}, \quad (4.4-47)$$

где  $T$  — полное время движения вдоль рассматриваемого участка траектории, а  $t$  — время, прошедшее с момента начала движения вдоль этого участка. Положение и ориентация системы координат схвата в момент  $t$  определяются соответственно равенствами

$$p(t) = p_1 - \lambda(t)(p_1 - p_0), \quad (4.4-48)$$

$$R(t) = R_1 \text{Rot}[\mathbf{n}, -\theta\lambda(t)], \quad (4.4-49)$$

где  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta)$  — поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $\mathbf{n}$ , переводящий матрицу ориентации схвата из  $R_0$  в  $R_1$ :

$$\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta) = R_0^{-1}R_1. \quad (4.4-50)$$

Последнее равенство означает, что  $\text{Rot}(\mathbf{n}, \theta)$  описывает в форме кватерниона поворот, задаваемый матрицей  $R_0^{-1}R_1$ . Следует отметить, что вектор  $p_1 - p_0$  в равенстве (4.4-48) и вектор  $\mathbf{n}$  и угол  $\theta$  в равенстве (4.4-49) в том случае, если система координат  $F_1$  неподвижна, достаточно вычислить только один раз. С другой стороны, если точка, в которую должен быть перемещен схват, движется, то меняется и матрица  $F_1$ . В этом случае  $p_1 - p_0$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\theta$  должны вычисляться на каждом шаге, и, как показал Тэйлор [282], может иметь место ситуация погони.

Если схват манипулятора должен переходить с одного участка траектории на другой с постоянным ускорением, между участками будет иметь место интервал разгона или торможения. Для реализации такого движения ускорение должно включаться за время  $\tau$  до прохода точки пересечения рассматриваемых участков и выключаться через время  $\tau$  после прохода этой точки. Из этого требования вытекают граничные условия для

участка перехода

$$p(T_1 - \tau) = p_1 - \frac{\tau \Delta p_1}{T_1}, \quad (4.4-51)$$

$$p(T_1 + \tau) = p_1 + \frac{\tau \Delta p_2}{T_2}, \quad (4.4-52)$$

$$\frac{d}{dt} p(t) \Big|_{t=T_1-\tau} = \frac{\Delta p_1}{T_1}, \quad (4.4-53)$$

$$\frac{d}{dt} p(t) \Big|_{t=T_1+\tau} = \frac{\Delta p_2}{T_2}, \quad (4.4-54)$$

где  $\Delta p_1 = p_1 - p_0$ ;  $\Delta p_2 = p_2 - p_1$ ;  $T_1$  и  $T_2$  — соответственно интервалы времени, в течение которых проходятся первый и второй участки. Если на участке перехода действует постоянное ускорение

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = a_p, \quad (4.4-55)$$

то двукратным интегрированием (4.4-55) с учетом граничных условий получаем равенство, описывающее поступательное движение системы координат схвата:

$$p(t') = p_1 - \frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \Delta p_1 + \frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \Delta p_2, \quad (4.4-56)$$

где  $t' = T_1 - t$  — время до момента пересечения двух участков траектории. Аналогично получается уравнение, описывающее изменение ориентации системы координат схвата:

$$R(t) = R_1 \text{Rot}[\mathbf{n}_1, -\frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_1} \theta_1] \text{Rot}[\mathbf{n}_2, -\frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \theta_2], \quad (4.4-57)$$

где

$$\text{Rot}(\mathbf{n}_1, \theta_1) = R_0^{-1}R_1 \quad \text{и} \quad \text{Rot}(\mathbf{n}_2, \theta_2) = R_1^{-1}R_2.$$

Последние два равенства обозначают представление соответствующих заданных матрицами поворотов в форме кватернионов. Полученные уравнения, описывающие поступательное и вращательное движение системы координат схвата, обеспечивают плавный переход между двумя участками траектории. Следует отметить, что угловое ускорение будет постоянным только в том случае, если  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  параллельны или если одна из угловых скоростей  $\phi_1 = \frac{\theta_1}{T_1}$  или  $\phi_2 = \frac{\theta_2}{T_2}$  равна нулю.

**Траектория с ограниченными отклонениями.** Описанный выше способ формирования траектории в декартовых координатах требует существенных затрат вычислительного времени. Кроме того, в реальном времени весьма сложно реализовать учет ограничений на движение манипулятора в пространстве присоединенных переменных. Существует ряд возможностей устранить эти трудности. Можно заранее (до осуществления

движения) получить и записать в память вычислителя решение обратной задачи кинематики, моделируя работу алгоритма. Реализовать заданное движение в этом случае не составит труда, поскольку последовательность точек управления будет просто считываться из памяти компьютера. Другой возможный путь состоит в том, чтобы заранее вычислить значения присоединенных координат в некоторой последовательности точек каждого из участков траектории и затем осуществить интерполяцию полиномами низкой степени. Сложность такого подхода состоит в том, что число промежуточных точек, необходимое для осуществления движения, достаточно близкого к прямолинейному, зависит от выполняемого движения. Априорный выбор интервала, достаточно малого для того, чтобы обеспечить малые отклонения от прямолинейного движения, приводит к резкому возрастанию объема предварительных вычислений и используемых ресурсов памяти. Учитывая все это, Тэйлор [282] предложил способ планирования траекторий в пространстве присоединенных переменных, называемых *траекториями с ограниченными отклонениями*. Этот метод позволяет на этапе предварительных вычислений выбрать промежуточные точки в количестве, достаточном для того, чтобы отклонения планируемой траектории схвата от прямолинейной не превышали некоторых заданных пределов.

При таком подходе сначала вычисляются векторы присоединенных координат  $q_i$ , соответствующие узловым точкам траектории, заданным в декартовом пространстве. Затем вычисленные векторы используются в качестве узловых точек в процедуре построения траектории изменения присоединенных переменных, аналогичной процедуре, используемой при построении траектории в декартовых координатах. Движение из точки  $q_0$  в точку  $q_1$  описывается уравнением

$$q(t) = q_1 - \frac{T_1 - t}{T_1} \Delta q_1, \quad (4.4-58)$$

а при переходе от участка между  $q_0$  и  $q_1$  к участку между  $q_1$  и  $q_2$  движение задается формулой

$$q(t') = q_1 - \frac{(\tau - t')^2}{4\tau T_2} \Delta q_1 + \frac{(\tau + t')^2}{4\tau T_2} \Delta q_2, \quad (4.4-59)$$

где  $\Delta q_1 = q_1 - q_0$ ,  $\Delta q_2 = q_2 - q_1$ , а  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\tau$  и  $t'$  имеют тот же смысл, что и выше. Эти уравнения обеспечивают постоянную скорость движения между узловыми точками в пространстве присоединенных координат и плавный переход с постоянным ускорением от одного участка траектории к другому. Однако при этом система координат схвата может существенно отклоняться от заданной прямолинейной траектории. Величина отклонения характеризуется разностью между  $F_j(t)$ , описывающей

положение схвата, соответствующее точке  $q_j(t)$  в пространстве присоединенных переменных, и  $F_d(t)$ , описывающей положение схвата в момент  $t$  при условии его движения по заданной прямолинейной траектории в декартовом пространстве. Отклонения положения и ориентации определяются соответственно формулами

$$\delta_p = |p_j(t) - p_d(t)|, \quad (4.4-60)$$

$$\delta_R = |\text{угловая часть Rot}(n, \varphi)| = |\varphi|, \quad (4.4-61)$$

где  $\text{Rot}(n, \varphi) = R_d^{-1}(t) R_j(t)$ .

Задавая максимальные допустимые отклонения по положению и ориентации  $\delta_p^{\text{макс}}$  и  $\delta_R^{\text{макс}}$ , мы потребуем выполнения условий

$$\delta_p \leq \delta_p^{\text{макс}} \quad \text{и} \quad \delta_R \leq \delta_R^{\text{макс}}. \quad (4.4-62)$$

Для этого необходимо выбрать достаточное количество промежуточных точек между двумя последовательными узловыми точками. Предложенный Тэйлором [282] способ построения траекторий с ограниченными отклонениями является по существу алгоритмом последовательного построения промежуточных точек, обеспечивающих выполнение условий (4.4-62). Этот алгоритм обладает быстрой сходимостью, хотя формируемый с его помощью набор промежуточных точек и не является минимальным. Этот алгоритм приведен ниже.

**Алгоритм формирования траекторий с ограниченными отклонениями.** При заданных максимальных отклонениях  $\delta_p^{\text{макс}}$  и  $\delta_R^{\text{макс}}$  по положению и ориентации соответственно и заданных узловых точках  $F_i$  траектории в декартовом пространстве этот алгоритм формирует последовательность промежуточных узловых точек в пространстве присоединенных переменных такую, что отклонения системы координат схвата от заданной прямолинейной траектории в декартовом пространстве не превышают заданных пределов.

**S1. Вычисление значений присоединенных переменных.** Определить векторы присоединенных координат  $q_0$  и  $q_1$ , соответствующие точкам  $F_0$  и  $F_1$ .

**S2. Вычисление средней точки в пространстве присоединенных переменных.** Вычислить среднюю точку  $q_m$  в пространстве присоединенных переменных

$$q_m = q_1 - 1/2 \Delta q_1,$$

где  $\Delta q_1 = q_1 - q_0$ , и вычислить положение  $F_m$  системы координат схвата, соответствующее значениям присоединенных координат  $q_m$ .

**S3. Вычисление средней точки в декартовом пространстве.** Вычислить соответствующую среднюю точку  $F_c$  траектории в



декартовом пространстве:

$$p_c = \frac{p_0 + p_1}{2}, \quad R_c = R_1 \text{Rot} \left[ n_1, -\frac{\theta}{2} \right],$$

где  $\text{Rot}(n, \theta) = R_0^{-1} R_1$ .

**S4. Вычисление отклонения.** Вычислить отклонение  $F_m$  от  $F_c$   $\delta_p = |p_m - p_c|$ ,  $\delta_R = |\text{угловая часть } \text{Rot}(n, \varphi) = R_c^{-1} R_m| = |\varphi|$ <sup>1)</sup>.

**S5. Проверка условия ограниченности отклонений.** Если  $\delta_p \leq \delta_p^{\text{макс}}$  и  $\delta_R \leq \delta_R^{\text{макс}}$ , закончить работу алгоритма. В противном случае вычислить вектор  $q_c$  присоединенных координат, соответствующих точке  $F_c$  декартовой траектории, и выполнить шаги S2 — S5 последовательно для двух подынтервалов, заменяя  $F_1$  на  $F_c$  и  $F_c$  на  $F_0$ .

Этот алгоритм обладает достаточно быстрой сходимостью. Как правило, на одной итерации максимальное отклонение уменьшается примерно в 4 раза. Тейлор [282] исследовал скорость сходимости представленного алгоритма для цилиндрического манипулятора (два поступательных и два вращательных сочленения). Оказалось, что на одной итерации максимальное отклонение уменьшается не более чем в 4 и не менее чем в 2 раза в зависимости от положения манипулятора.

Итак, метод построения траекторий с ограниченными отклонениями состоит в формировании последовательности промежуточных точек в пространстве присоединенных переменных, обеспечивающей движение схвата в декартовом пространстве вдоль траектории, отклонение которой от заданной прямолинейной траектории не превышает заданных пределов.

#### 4.4.3. Описание траектории кубическими полиномами с учетом ограничения моментов

В предложенных Тэйлором способах планирования прямолинейных траекторий формирование векторов присоединенных координат  $\{q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)\}$  вдоль заданной в декартовом пространстве траектории производится без учета динамики манипулятора. Однако характеристики силовых приводов сочленений имеют участки насыщения, и величина развиваемых приводами сил и моментов ограничена. Ограничения располагаемых сил и моментов необходимо учитывать при планировании прямолинейных траекторий. Это приводит также к необходимости двух последовательных этапов в осуществлении управления манипуля-

тором: выбор оптимальной траектории до начала движения и регулирование движения вдоль выбранной траектории в процессе работы манипулятора.

При планировании прямолинейных траекторий в декартовом пространстве условия, которым должна удовлетворять траектория, задаются в декартовых координатах, в то время как ограничения реализуемых приводами сил и моментов задаются в пространстве присоединенных переменных. Таким образом, возникает задача оптимизации с ограничениями, заданными в различных системах координат. Путем аппроксимации полиномами низкой степени можно сформировать траекторию манипулятора в пространстве присоединенных переменных, соответствующую траектории в декартовом пространстве, и проводить оптимизацию траектории и регулирование движения на уровне присоединенных переменных [59]. Другая возможность состоит в том, чтобы преобразовать ограничения сил и моментов к декартовой системе координат, в которой затем проводить оптимизацию траектории и регулирование движения [165].

Несмотря на необходимость проведения многочисленных нелинейных преобразований из декартовой системы координат в пространство присоединенных переменных, более простым оказался подход, в котором планирование траектории ведется на уровне присоединенных переменных. Лин [172] предложил способ интерполяции траектории в пространстве присоединенных координат между узловыми точками, выбранными на заданной прямолинейной траектории. С помощью этого способа прямолинейная траектория в декартовом пространстве преобразуется в  $N$  траекторий присоединенных переменных — по одной для каждого сочленения. Поскольку аналитический вид такого преобразования неизвестен, используются способы полиномиальной интерполяции, позволяющие аппроксимировать заданную траекторию. Для этого на заданной траектории выбирается достаточное число узловых точек и каждый из участков между двумя последовательными узловыми точками аппроксимируется  $N$  полиномами — по одному для каждой присоединенной переменной. Аппроксимирующие полиномы должны проходить через узловые точки. Для аппроксимации Лин [172] выбрал кубические полиномы, позволяющие получить достаточно гладкую траекторию при малых перерегулированиях по угловому положению между соседними узловыми точками. Между каждыми двумя соседними точками из  $n$  используемых узловых точек траектория аппроксимируется отрезком кубического полинома. Значения присоединенных координат в  $n-2$  узловых точках фиксированы. В двух узловых точках значения присоединенных координат априорно не определены. Это необходимо для того, чтобы обеспечить выполнение условий непрерывности по положению, скорости и ускорению вдоль всей траектории. Для определения не-

<sup>1)</sup> Правильнее писать  $\delta_R = |\text{угловая часть } \text{Rot}(n, \varphi)| = |\varphi|$ , где  $\text{Rot}(n, \varphi) = R_c^{-1} R_m$ . — Прим. перев.

известных коэффициентов полиномов нужно решить систему  $n-2$  уравнений. Получаемое векторное уравнение имеет удобную для решения структуру. Его решениями являются аппроксимирующие траекторию функции, которые зависят от интервалов времени между узловыми точками. Для минимизации времени прохождения всей заданной траектории нужно скорректировать величины этих интервалов с учетом имеющихся ограничений. Тем самым задача сводится к минимизации времени движения путем соответствующего выбора временных интервалов.

Пусть однородная матрица  $\mathbf{H}(t)$  описывает положение системы координат схвата. Схват должен пройти последовательность узловых точек в декартовом пространстве:  $\mathbf{H}(t_1)$ ,  $\mathbf{H}(t_2)$ , ...,  $\mathbf{H}(t_n)$ . Векторы присоединенных координат  $(q_{11}, q_{21}, \dots, q_{N1})$ ,  $(q_{12}, q_{22}, \dots, q_{N2})$ , ...,  $(q_{1n}, q_{2n}, \dots, q_{Nn})$ , соответствующие этим узловым точкам, вычисляются с помощью программы решения обратной задачи кинематики. Здесь  $q_{ji}$  обозначает  $j$ -ю присоединенную переменную, соответствующую положению схвата в  $i$ -й узловой точке  $\mathbf{H}(t_i)$ . Требуется построить кубическую интерполяцию траектории  $j$ -й присоединенной переменной между точками  $[q_{j1}(t_1), q_{j2}(t_2), \dots, q_{jn}(t_n)]$ , где  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  — моменты прохождения узловых точек. В начальный момент  $t = t_1$  и конечный момент  $t = t_n$  заданы соответственно начальные  $q_{j1}$ ,  $v_{j1}$ ,  $a_{j1}$  и конечные  $q_{jn}$ ,  $v_{jn}$ ,  $a_{jn}$  (положение, скорость и ускорение). Кроме того, значения присоединенной переменной  $q_{jk}$  в моменты времени  $t_k$  заданы для  $k = 3, 4, \dots, n-2$ . Значения  $q_2$  и  $q_{n-1}$  не определены: как уже говорилось, это необходимо для обеспечения непрерывности кинематических характеристик вдоль всей траектории.

Пусть  $Q_{ji}(t)$  — кубический полином, описывающий поведение  $j$ -й присоединенной переменной между узловыми точками  $\mathbf{H}_i$  и  $\mathbf{H}_{i+1}$  и определенный на интервале  $[t_i, t_{i+1}]$ . Задача состоит в «сшивке» между собой полиномов  $Q_{ji}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) так, чтобы они проходили через заданные узловые точки и обеспечивалась непрерывность положения, скорости и ускорения на всем интервале  $[t_1, t_n]$ . Поскольку  $Q_{ji}(t)$  — кубический полином, его вторая производная  $\ddot{Q}_{ji}(t)$  является линейной функцией времени  $t$ :

$$\ddot{Q}_{ji}(t) = \frac{t_{i+1} - t_i}{u_i} \ddot{Q}_{ji}(t_i) + \frac{(t - t_i)}{u_i} \ddot{Q}_{ji}(t_{i+1}), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n-1, \\ j = 1, \dots, N, \end{matrix} \quad (4.4-63)$$

где  $u_i = t_{i+1} - t_i$  — время, затрачиваемое на прохождение  $i$ -го участка. Дважды интегрируя  $\ddot{Q}_{ji}(t)$  и учитывая граничные условия  $Q_{ji}(t_i) = q_{ji}$  и  $Q_{ji}(t_{i+1}) = q_{j, i+1}$ , получаем интерполирующую

функцию следующего вида:

$$Q_{ji}(t) = \frac{\ddot{Q}_{ji}(t_i)}{6u_i} (t_{i+1} - t)^3 + \frac{\ddot{Q}_{ji}(t_{i+1})}{6u_i} (t - t_i)^3 + \left[ \frac{q_{j, i+1}}{u_i} - \frac{u_i \ddot{Q}_{ji}(t_{i+1})}{6} \right] (t - t_i) + \left[ \frac{q_{j, i}}{u_i} - \frac{u_i \ddot{Q}_{ji}(t_i)}{6} \right] (t_{i+1} - t), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1, \\ j = 1, 2, \dots, N. \end{matrix} \quad (4.4-64)$$

Таким образом, для  $i = 1, 2, \dots, n-1$   $Q_{ji}(t)$  определены, если известны  $\ddot{Q}_{ji}(t_i)$  и  $\ddot{Q}_{ji}(t_{i+1})$ . На основании этого можно записать систему  $n-2$  линейных уравнений относительно неизвестных  $\ddot{Q}_{ji}(t_i)$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ :

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{b}, \quad (4.4-65)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \ddot{Q}_{j2}(t_2) \\ \ddot{Q}_{j3}(t_3) \\ \vdots \\ \ddot{Q}_{j, n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 + \frac{u_1^2}{u_2} & u_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_2 - \frac{u_1^2}{u_2} & 2(u_2 + u_3) & u_3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_3 & 2(u_3 + u_4) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & u_4 & \dots & 2(u_4 + u_{n-3}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2(u_{n-3} + u_{n-2}) & u_{n-2} - \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & u_{n-2} & 3u_{n-1} + 2u_{n-2} + \frac{u_{n-1}^2}{u_{n-2}} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \left[ \frac{q_{j3}}{u_2} + \frac{q_{j1}}{u_1} \right] - 6 \left[ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right] \left[ q_{j1} + u_1 v_{j1} + \frac{u_1^2}{3} a_{j1} \right] - u_1 a_{j1}, \\ \frac{6}{u_2} \left[ q_{j1} + u_1 v_{j1} + \frac{u_1^2}{3} a_{j1} \right] + \frac{6q_{j4}}{u_3} - 6 \left[ \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right] q_{j3} \\ 6 \left[ \frac{q_{j5} - q_{j4}}{u_4} - \frac{q_4 - q_{j3}}{u_3} \right] \\ 6 \left[ \frac{q_{j5} - q_{j-4}}{u_4} - \frac{q_4 - q_{j3}}{u_3} \right] \\ \vdots \\ \frac{6}{u_{n-2}} \left[ q_{jn} - v_{jn} u_{n-1} + \frac{u_{n-1}^2}{3} a_{jn} \right] - \\ - 6 \left[ \frac{1}{u_{n-2}} + \frac{1}{u_{n-3}} \right] q_{j, n-2} + \frac{6}{u_{n-3}} q_{j, n-3} \\ - 6 \left[ \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}} \right] \left[ q_{jn} - v_{jn} u_{n-1} + \frac{u_{n-1}^2}{3} a_{jn} \right] + \\ + \frac{6q_{jn}}{u_{n-1}} + \frac{6q_{n-2}}{u_{n-1} u_{n-2}} - u_{n-1} a_{jn} \end{bmatrix}.$$

Структура матрицы  $\mathbf{A}$  позволяет легко определить  $\mathbf{Q}$ , подстановкой которого в выражение (4.4-63) получается окончательный вид  $Q_{ji}(t)$ . В окончательном виде полиномы  $Q_{ji}(t)$  зависят от интервалов времени  $u_i$  и заданных значений присоединенных координат, скоростей и ускорений. Матрица  $\mathbf{A}$  в уравнении (4.4-64) всегда неособенная, если интервалы  $u_i$  положительны. Поэтому задача интерполяции траектории кубическими полиномами всегда имеет единственное решение.

Поскольку характеристики силовых приводов сочленений имеют участки насыщения и развиваемые приводами моменты и силы ограничены, минимальное общее время движения вдоль траектории, описываемой кубическими полиномами, определяется максимальными значениями присоединенных скоростей, ускорений и допустимой скоростью изменения ускорения. Для увеличения скорости работы манипулятора нужно минимизировать время движения вдоль заданной траектории. Этого можно достичь соответствующим выбором величин интервалов  $u_i$  с учетом ограничений присоединенных скоростей, ускорений, моментов и скоростей изменения ускорений. Задачу можно сформулировать следующим образом: минимизировать целевую функцию  $T$

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \quad (4.4-66)$$

при следующих ограничениях:

Ограничение по скорости:  $|\dot{Q}_{ji}(t)| \leq V_j$ ,

$$j = 1, \dots, N, \\ i = 1, \dots, n-1.$$

Ограничение по ускорению:  $|\ddot{Q}_{ji}(t)| \leq A_j$ ,

$$j = 1, \dots, N, \\ i = 1, \dots, n-1.$$

Ограничение по скорости изменения ускорения:  $\left| \frac{d^3}{dt^3} Q_{ji}(t) \right| \leq J_j$ ,

$$j = 1, \dots, N, \\ i = 1, \dots, n-1.$$

Ограничение моментов:  $|\tau_j(t)| \leq \Gamma_j, j = 1, \dots, N$ .

Здесь  $T$  — общее время движения вдоль заданной траектории;  $V_j, A_j, J_j$  и  $\Gamma_j$  соответственно максимальные значения скорости, ускорения, скорости изменения ускорения, момента в  $j$ -м сочленении.

Строгое представление этих ограничений приведено ниже.

**Ограничение по скорости.** Дифференцируя равенство (4.4-64) и заменяя  $\dot{Q}_{ji}(t_i)$  и  $\dot{Q}_{ji}(t_{i+1})$  соответственно на  $\omega_{ji}$  и  $\omega_{j, i+1}$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ji}(t) &= \frac{\omega_{ji}}{2u_i} (t_{i+1} - t)^2 + \frac{\omega_{j, i+1}}{2u_i} (t - t_i)^2 + \\ &+ \left[ \frac{q_{j, i+1}}{u_i} - \frac{u_i \omega_{j, i+1}}{6} \right] - \left[ \frac{q_{ji}}{u_i} - \frac{u_i \omega_{ji}}{6} \right], \end{aligned} \quad (4.4-67)$$

$$\ddot{Q}_{ji}(t) = \frac{\omega_{j, i+1}}{u_i} (t - t_i) - \frac{\omega_{ji}}{u_i} (t - t_{i+1}), \quad (4.4-68)$$

где  $\omega_{ji}$  — ускорение в узловой точке  $\mathbf{H}_i$ . Оно равно  $\dot{Q}_{ji}(t_i)$ , если  $Q_{ji}(t)$  проходит через узловую точку  $\mathbf{H}_i$  в момент  $t_i$ . Скорость достигает своего максимального по абсолютной величине значения в одной из точек  $t_i, t_{i+1}$  или  $\bar{t}_i$ , при этом  $\bar{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$  и  $\dot{Q}_{ji}(\bar{t}_i) = 0$ . Ограничение по скорости, таким образом, принимает вид

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\dot{Q}_{ji}| &= \max [|\dot{Q}_{ji}(t_i)|, |\dot{Q}_{ji}(t_{i+1})|, |\dot{Q}_{ji}(\bar{t}_i)|] \leq V_j, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1, \\ j &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.4-69)$$

где

$$|\dot{Q}_{ji}(t_i)| = \left| \frac{\omega_{ji}}{2} u_i + \frac{q_{j,i+1} - q_{ji}}{u_i} + \frac{(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1}) u_i}{6} \right|,$$

$$|\dot{Q}_{ji}(t_{i+1})| = \left| \frac{\omega_{j,i+1}}{2} u_i + \frac{q_{j,i+1} - q_{ji}}{u_i} + \frac{(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1}) u_i}{6} \right|,$$

$$\dot{Q}_{ji}(\bar{t}_i) = \begin{cases} \left| \frac{\omega_{ji} \omega_{j,i+1} u_i}{2(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1})} + \frac{(\omega_{ji} - \omega_{j,i+1}) u_i}{6} + \frac{q_{j,i+1} - q_{ji}}{u_i} \right|, & \text{если } \omega_{ji} \neq \omega_{j,i+1} \text{ и } \bar{t}_i \in [t_i, t_{i+1}], \\ 0, & \text{если } \omega_{ji} = \omega_{j,i+1} \text{ или } \bar{t}_i \notin [t_i, t_{i+1}]. \end{cases}$$

**Ограничения по ускорению.** Между двумя узловыми точками ускорение линейно зависит от времени. Поэтому максимальная абсолютная величина ускорения достигается в точке  $t_i$  или в точке  $t_{i+1}$  и равна максимальной из величин  $\{|\omega_{ji}|, |\omega_{j,i+1}|\}$ . С учетом этого ограничение по ускорению принимает следующий вид:

$$\max \{|\omega_{j1}|, |\omega_{j2}|, \dots, |\omega_{jn}|\} \leq A_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4-70)$$

**Ограничения по скорости изменения ускорения.**

$$\left| \frac{\omega_{j,i+1} - \omega_{ji}}{u_i} \right| \leq J_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.4-71)$$

**Ограничения моментов.** Момент, который должен быть создан силовым приводом для реализации заданного движения, можно рассчитать с помощью уравнений динамики движения манипулятора (равенство (3.2-25)):

$$\tau_j(t) = \sum_{k=1}^N D_{jk}(\mathbf{Q}_i(t)) \ddot{Q}_{ji}(t) + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N h_{jkm}(\mathbf{Q}_i(t)) \dot{Q}_{ki}(t) \dot{Q}_{mi}(t) + c_j(\mathbf{Q}_i(t)), \quad (4.4-72)$$

где

$$\mathbf{Q}_i(t) = (Q_{1i}(t), Q_{2i}(t), \dots, Q_{Ni}(t))^T, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Если условия ограничения моментов не выполняются, должно быть произведено динамическое временное масштабирование траектории, обеспечивающее выполнение этих условий [8, 122].

Для решения сформулированной задачи оптимизации при наличии ограничений надо выбрать подходящий алгоритм опти-

мизации. Существует несколько алгоритмов оптимизации для задач такого типа. Лин и др. [172] воспользовались методом гибкого поиска, предложенным Нелдером и Медом. Результаты применения этого оптимизационного метода изложены в работе [172].

#### 4.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были рассмотрены два основных подхода к планированию траекторий: планирование сглаженных траекторий в пространстве присоединенных переменных и планирование траекторий в декартовом пространстве. Планирование траекторий в пространстве присоединенных переменных состоит в описании закона изменения присоединенных координат последовательностями полиномов, что позволяет получать гладкие траектории изменения присоединенных переменных. Для снижения вычислительных затрат и минимизации бесполезных движений используются последовательности полиномов низкой степени. Траектория изменения присоединенной переменной разбивается на несколько участков, каждый из которых интерполируется полиномом низкой степени. В частности, были рассмотрены способы описания траектории с помощью двух полиномов четвертой и одного — третьей степени (4-3-4-траектории) и с помощью пяти кубических полиномов.

Был рассмотрен ряд методов планирования траекторий в декартовом пространстве. Поскольку управление манипулятором осуществляется в пространстве присоединенных переменных, а траектория движения задается в декартовом пространстве, обычно пользуются полиномиальной аппроксимацией заданного в декартовом пространстве движения траекторией в пространстве присоединенных переменных. Для осуществления прямолинейного движения Пол [228] предложил использовать композицию поступательного перемещения и двух поворотов схвата манипулятора. Предложенный Полом метод был усовершенствован Тэйлором [282] за счет применения кватернионов для описания вращений. Тэйлор разработал также способ построения траекторий с ограниченными отклонениями. Основой этого способа является алгоритм формирования последовательности дополнительных узловых точек на заданной декартовой траектории при аппроксимации ее траекторией в пространстве присоединенных переменных. Лин и др. [172] предложили подход, состоящий в интерполяции заданной траектории кубическими полиномами по  $n$  выбираемым исследователем узловым точкам. При этом проводилась минимизация времени движения вдоль выбранной траектории с учетом ограничений по скорости, ускорению и скорости изменения ускорения присоединенных переменных и ограничений моментов, создаваемых приводами. Рассмотренные

методы применяются на этапе планирования траекторий, осуществляемом до начала движения манипулятора. Тем самым управление манипулятором разбивается на два этапа — этап планирования и этап регулирования движения манипулятора вдоль выбранной траектории, которое производится в процессе работы манипулятора. Второму этапу посвящена гл. 5.

## Литература

Дополнительные сведения о сглаженных траекториях в пространстве присоединенных переменных содержатся в работах [29, 163, 169, 170, 226]. В большинстве из перечисленных работ построение траекторий производится без учета ограничений динамики манипулятора. Основное внимание в них сосредоточено на обеспечении гладкости и непрерывности траекторий за счет выбора соответствующих ограничений по скорости и ускорению. Холлербах [122] предложил способ временного масштабирования, позволяющий выяснить, возможно ли реализовать выбранную траекторию в рамках ограничений кинематических параметров и развиваемых силовыми приводами моментов, зависящих от мгновенных значений присоединенных переменных и скоростей.

Формирование траектории манипулятора, обеспечивающей движение схвата вдоль отрезков прямой в декартовом пространстве рассмотрено в работе [228]. Для описания положений, через которые должен пройти схват манипулятора. Пол воспользовался матрицами однородных преобразований. Движение между двумя последовательными заданными положениями представляет собой композицию поступательного перемещения, поворота, обеспечивающего требуемое положение вектора подхода, и поворота вокруг оси инструмента, обеспечивающего заданную ориентацию схвата. Для обеспечения гладкости траектории применяется квадратическая интерполяция траектории движения между соседними прямолинейными участками. Воспользовавшись аппаратом кватернионов, Тэйлор [282] усовершенствовал предложенный Полом метод, добившись более равномерного движения. Оба метода в целях обеспечения возможности планирования траекторий в реальном времени не учитывают физических ограничений на величину моментов, создаваемых приводами манипулятора.

Ряд других схем планирования траекторий в декартовом пространстве позволяет одновременно обеспечить непрерывность траектории и учесть ограничения моментов. Для того чтобы учесть ограничения моментов на этапе планирования траектории, обычно предполагают, что максимальное значение момента не зависит от скорости и положения манипулятора. В частности, в работах [172, 184] переменные ограничения моментов были

заменены постоянными для каждой присоединенной переменной ограничениями по скорости, ускорению и скорости изменения ускорения. Авторы этих работ выбрали последовательность узловых точек на траектории в декартовом пространстве, определили в этих точках значения присоединенных координат и с помощью интерполяции полиномами низкой степени построили гладкую траекторию в пространстве присоединенных переменных, отвечающую условиям непрерывности и проходящую через выбранные узловые точки. Затем в предположении о постоянстве динамических ограничений проводился выбор интервалов времени движения между узловыми точками с учетом ограничений. Поскольку интерполяция траектории производилась в пространстве присоединенных переменных, то на каждом участке между соседними узловыми точками движение схвата манипулятора может отклоняться от заданной в декартовом пространстве траектории.

Ли [152] разработал дискретную схему планирования траектории, обеспечивающую выбор узловых точек в точности на заданной прямолинейной траектории в декартовом пространстве, удовлетворяющей условиям гладкости и ограничениям динамики. Задача планирования траектории сформулирована им как задача максимизации расстояния между последовательными узловыми точками на прямолинейной траектории в декартовом пространстве при ограничениях, обусловленных требованиями гладкости и динамикой манипулятора.

В связи с необходимостью дискретной аппроксимации присоединенных скоростей, ускорений и скоростей изменения ускорений решение задачи оптимизации требует большого количества вычислений, что препятствует эффективному применению этой схемы. Для снижения вычислительных затрат оптимизация производится с помощью итеративных алгоритмов поиска.

## Упражнения

4.1. Однозвенный манипулятор с вращательным сочленением должен за 2 с переместиться из положения  $\theta(0) = 30^\circ$  в положение  $\theta(2) = 100^\circ$ . Присоединенные скорости и ускорения в начальной и конечной точках равны нулю.

а) Какова максимальная степень полинома, пригодного для описания этого движения?

б) Какова минимальная степень полинома, пригодного для описания этого движения?

4.2. В упр. 4.1 определите а) коэффициенты кубического полинома, описывающего заданное движение; б) коэффициенты полинома четвертой степени, описывающего заданное движение; в) коэффициенты полинома пятой степени, описывающего заданное движение. Допускается разбиение траектории на участки.

4.3. Предположим, что длина каждого звена двухзвенного манипулятора, описанного в разд. 3.2.6, составляет 1 м. Требуется переместить манипулятор из начального положения  $(x_0, y_0) = (1,96, 0,50)$  в конечное положение

$(x_i, y_i) = (1,00, 0,75)$ . Начальные и конечные скорости и ускорения равны нулю. Найти коэффициенты кубических полиномов, описывающих заданное движение по каждой из присоединенных переменных. Допускается разбиение траектории на несколько участков.

4.4. Планирование 4-3-4-траекторий требует решения векторного уравнения (4.3-45). Всегда ли существует матрица, обратная матрице (4.3-46)? Обоснуйте свой ответ.

4.5. Для манипулятора Пума 560, системы координат звеньев которого заданы на рис. 2.11, требуется построить 4-3-4-траекторию для следующих условий движения. Начальное положение манипулятора задается матрицей однородного преобразования  $T_n$ :

$$T_n = \begin{bmatrix} -0,660 & -0,436 & -0,612 & -184,099 \\ -0,750 & 0,433 & 0,500 & 892,250 \\ 0,047 & 0,789 & -0,612 & -34,599 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Конечное положение задается матрицей  $T_k$ :

$$T_k = \begin{bmatrix} -0,933 & -0,064 & 0,355 & 412,876 \\ -0,122 & 0,982 & -0,145 & 596,051 \\ -0,339 & -0,179 & -0,924 & -545,869 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Точки подхода и ухода определяются по «правилу большого пальца» вычислением 25% от  $d_6$  (величина  $d_6$  составляет 56,25 мм). Найти матрицы однородных преобразований  $T_u$  и  $T_n$ , соответствующие точкам ухода и подхода.

4.6. Для манипулятора Пума 560, системы координат звеньев которого заданы на рис. 2.11, требуется построить 4-3-4-траекторию для следующих условий движения. Начальное положение манипулятора задается матрицей однородного преобразования  $T_n$ :

$$T_n = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 600,0 \\ 0 & 0 & -1 & -100,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Положение в точке подхода задается матрицей  $T_n$ :

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 100,0 \\ 1 & 0 & 0 & 400,0 \\ 0 & 0 & -1 & -50,0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

а) Точки ухода и подхода определяются по «правилу большого пальца» вычислением 25% от  $d_6$  (величина  $d_6$  составляет 56,25 мм), при этом допустим произвольный поворот. Определите матрицу  $T_u$ , описывающую точку ухода, если схват при переходе из начальной точки в точку ухода развернулся на  $60^\circ$  вокруг оси  $s$ .

б) Определите матрицу  $T_k$ , описывающую конечное положение, если при переходе из точки подхода в конечную точку схват развернулся на  $-60^\circ$  вокруг оси  $s$ .

4.7. Требуется переместить манипулятор из точки А в точку В, где А и В описываются следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Движение из А в В представляет собой композицию поступательного перемещения и двух поворотов, как это описано в разд. 4.4.1. Найдите  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\phi$  и  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответствующего ведущего преобразования. Найдите также три промежуточных преобразования между А и В.

4.8. Требуется осуществить прямолинейный переход манипулятора из точки А в точку В, сопровождаемый разворотом с постоянной угловой скоростью на угол  $\theta$  вокруг вектора  $k$ . Точки А и В заданы следующими матрицами однородных преобразований:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найти вектор  $k$  и угол  $\theta$ . Найдите также три промежуточных преобразования между А и В.

4.9. Представьте найденный в упр. 4.8. поворот в форме кватерниона.

4.10. Опишите в форме кватернионов следующую последовательность поворотов: сначала на  $60^\circ$  вокруг оси  $j$ , затем на  $120^\circ$  вокруг оси  $i$ . Найдите результирующий поворот в кватернионной форме.

4.11. Покажите, что матрица А в выражении (4.4-64) всегда имеет обратную.

## Глава 5. УПРАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯТОРАМИ ПРОМЫШЛЕННОГО РОБОТА

Надо понимать, что происходящее вокруг в значительной степени нам не подвластно, зато нам подвластна наша реакция на происходящее.

Дж. Петти

### 5.1. ВВЕДЕНИЕ

Если динамические уравнения движения манипулятора заданы, целью управления манипулятором является выполнение им движений в соответствии с заданным рабочим критерием. Хотя проблема управления может быть сформулирована таким простым образом, ее решение усложняется действием сил инерции, реакции в соединениях и веса звеньев манипулятора. Проблема управления манипулятором в общем случае сводится, во-первых, к получению его динамических моделей и, во-вторых, к определению закона управления им на основе этих моделей для обеспечения требуемых рабочих и динамических характеристик системы. Первая часть проблемы управления подробно обсуждена в гл. 3, а вторая часть рассматривается в этой главе.

Анализ управляемого движения манипулятора показывает, что управление движением выполняется в два этапа. На первом этапе осуществляется управление транспортным движением, при котором манипулятор перемещается из начального положения или из исходной ориентации в окрестность желаемого конечного положения вдоль планируемой траектории или ориентируется в заданном положении. На втором этапе реализуется управление точным (корректирующим) движением, при котором датчик конечного положения взаимодействует с объектом, выдавая информацию в цепь обратной связи для завершения движения.

Современный подход при проектировании систем управления манипулятором состоит в том, чтобы управлять движением в каждом сочленении с помощью встроенного сервомеханизма. Такой подход не позволяет адекватно моделировать динамику манипулятора, поскольку не учитывает движение и конфигурацию реальной конструкции манипулятора. Это приводит к значительным отличиям параметров модели от параметров реальной управляемой системы, что снижает эффективность традиционных методов управления с использованием обратной связи. В результате скорость манипулятора уменьшается по сравнению

с расчетной и имеет место торможение, что ухудшает точность и скорость позиционирования манипулятора и сужает область применения робота. Таким образом, управляемые на основе рассмотренного подхода манипуляторы перемещаются с низкой скоростью и с паразитными вибрациями. Любое улучшение параметров управления манипулятором требует рассмотрения более эффективных динамических моделей, совершенствующих технику управления, а также использования особых вычислительных процедур. В данной главе рассматриваются методы, которые реализуют динамические модели, описанные в гл. 3, и позволяют повысить эффективность управления манипулятором.

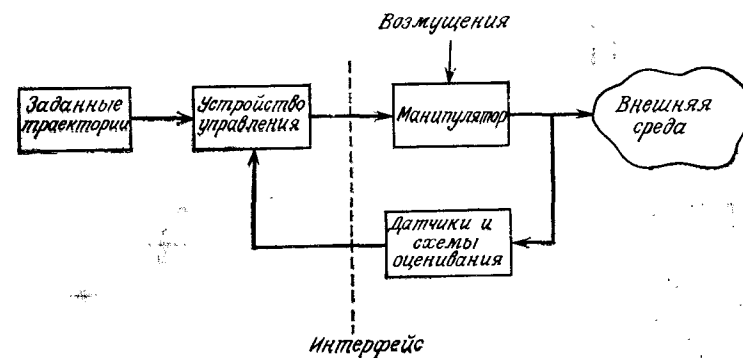


Рис. 5.1. Общая блок-схема управления манипулятором робота.

Рассматривая управление манипулятором как задачу формирования траектории движения (рис. 5.1), управление движением можно подразделить на три основных вида:

1. Управление движением сочленений манипулятора.
  - Сервомеханизм звена (схема управления манипулятором робота Пума).
  - Метод вычисления моментов.
  - Оптимальное по быстродействию управление.
  - Управление переменной структурой.
  - Нелинейное независимое управление.
2. Программное управление движением в декартовом пространстве по скорости, ускорению и силе.
3. Адаптивное управление.
  - Адаптивное управление по заданной модели.
  - Самонастраивающееся адаптивное управление.
  - Адаптивное управление по возмущению с компенсацией по прямой связи.
  - Адаптивное управление программным движением.

Предполагается, что движение вдоль траектории в связанной или декартовой системе координат является функцией времени.

## 5.2. УПРАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯТОРОМ РОБОТА ПУМА

Каждое сочленение манипулятора робота управляется своим простым сервомеханизмом. Устройство управления манипулятором робота Пума серии 560 состоит из вычислительного устройства DEC LSI-11/02 и шести микропроцессоров Rockwell 6503, каждый из которых имеет кодирующее устройство, цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) и усилитель тока. Структура управления построена иерархически. На верхнем уровне иерархической системы находится микрокомпьютер LSI-11/02, который используется в качестве ЭВМ верхнего уровня. На

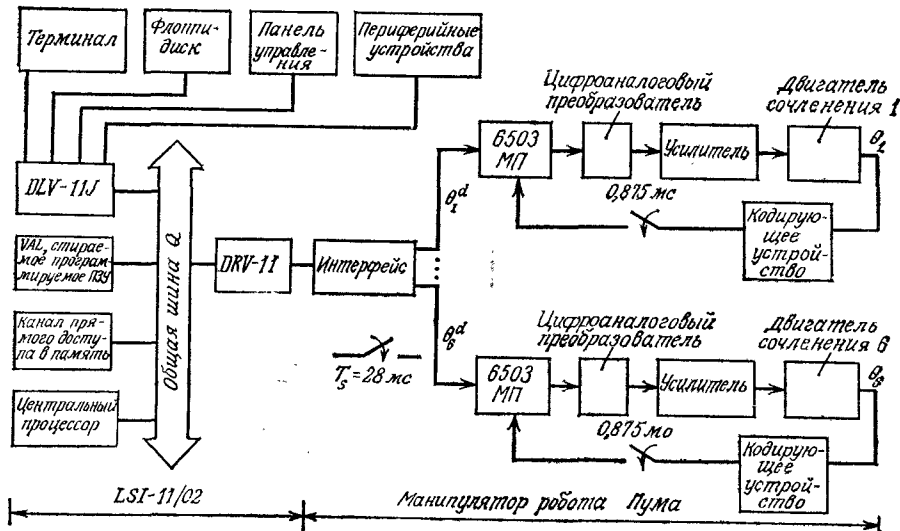


Рис. 5.2. Схема управления манипулятором робота Пума.

нижнем уровне располагается шесть микропроцессоров 6503 — по одному на каждую степень свободы (рис. 5.2). Вычислительное устройство выполняет две основные функции: 1) взаимодействие с пользователем в режиме связи терминала с процессором и составление подзадач из списка команд пользователя VAL<sup>1)</sup> и 2) координацию работы шести микропроцессоров 6503 для выполнения команды. Режим связи терминала пользователя с процессором включает грамматический разбор, интерпретацию и декодирование команд VAL, а также выдачу пользователю соответствующих сигналов об ошибках. Когда команда VAL декодирована, вызываются внутренние программы для вы-

<sup>1)</sup> VAL — пакет программ для управления манипулятором робота Пума, разработанный фирмой Unimation Inc.

полнения рабочих режимов и координирующих функций. В эти функции, которые находятся в памяти EPROM вычислительного устройства LSI-11/02, входят:

1. Преобразование систем координат (например, из неподвижной системы координат в связанную с шарнирами систему координат или наоборот).

2. Планирование траектории с учетом интерполяции в сочленениях, включающее приращения параметров, соответствующие каждой точке и каждому сочленению каждые 28 мс.

3. Передача информации о завершении движения по всем осям в микропроцессоры 6503, где формируются управляющие воздействия в соответствии с требованиями движения по приращениям.

4. Предварительный просмотр двух инструкций, необходимых для осуществления интерполяции в режиме непрерывного движения по траектории.

На нижнем уровне иерархии системы находятся устройства управления сочленениями, каждое из которых состоит из цифровой и аналоговой платы, а также из усилителя мощности для каждого сочленения. Микропроцессор 6503 является составной частью устройства управления сочленением, которая непосредственно управляет движением по каждой оси. Каждый микропроцессор находится на цифровой плате со своими системами EPROM и DAC (ЦАП). Он соединен с вычислительным устройством LSI-11/02 через интерфейсную плату, которая функционирует как демультиплексор, направляющий информацию об опорных точках траектории на каждое устройство управления сочленением. Интерфейсная плата связана с 16-разрядной платой параллельного интерфейса DEC (DRV-11), который производит обмен данными с шиной Q устройства LSI-11/02 (рис. 5.2). Микропроцессор вычисляет сигнал ошибки положения сочленения и посылает его на аналоговую плату, которая имеет обратную связь по току с каждым двигателем сочленения.

Для управления каждым сочленением имеются два контура управления. Внешний контур оперирует информацией об ошибке позиционирования и обменивается данными с микропроцессором 6503 примерно каждые 0,875 мс. Внутренний контур состоит из аналоговых устройств и компенсатора с обратной связью по производной для демпфирования сигналов отклонений по скорости. Коэффициенты передачи обоих контуров постоянны и обеспечивают «критическое демпфирование системы сочленений» по скорости, определяемой программой VAL. Основными функциями микропроцессоров являются:

1. Получение и обработка опорных точек траектории от вычислительного устройства LSI-11/02 и проведение интерполяции между текущими и заданными значениями параметров сочленений через 28 мс.



2. Считывание значений регистра, который накапливает приращение величин от кодового датчика, формируемых по каждой оси вращения, через 0,875 мс.

3. Накопление сигналов ошибки от интерполированных опорных точек сочленений и значений от кодового датчика по осям.

4. Преобразование сигналов ошибки в токовые сигналы с помощью преобразователя ДАС и подача их на аналоговую плату, сигналы с которой организуют движение в сочленениях.

Отметим, что в схеме управления роботом Пума используется пропорционально-интегрально-дифференциальный метод управления (ПИД-регулятор). Основной недостаток этой схемы управления состоит в том, что коэффициент передачи обратной связи постоянен и предварительно задан. Это не дает возможности изменять коэффициент передачи обратной связи при изменении нагрузок. Так как промышленный робот представляет собой достаточно нелинейную систему, то силы инерции, реакции и веса зависят от положения или от положения и скорости и могут изменяться в больших пределах. Таким образом, рассмотренная схема управления, в которой используется постоянный коэффициент передачи для управления нелинейной системой, неэффективна. Действительно, манипулятор робота Пума перемещается с сильными вибрациями на малых скоростях. Одно из решений этой проблемы заключается в использовании цифрового управления, при котором прикладываемые моменты к манипулятору робота обрабатываются на ЭВМ, где заложена соответствующая динамическая модель манипулятора. Вариант такого метода рассматривается в разд. 5.3.

### 5.3. МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ МОМЕНТОВ

Если движение манипулятора описывается уравнениями Лагранжа — Эйлера или Ньютона — Эйлера, задачей управления является нахождение управляющих моментов и сил. Эти моменты и силы должны обеспечивать максимально приближенное к заданной траектории движение конечного звена манипулятора в реальном времени. Управляющие моменты привода определяются с помощью динамической модели манипулятора, основанной на используемых уравнениях движения. В расчетной схеме моделируются рабочие характеристики двигателя, а также предусматривается преобразование вычисленного момента в управляющие напряжения или ток двигателя. Управляющее напряжение вычисляется с такой скоростью, которая позволяет пренебречь запаздываниями, возникающими в процессе анализа вычислений.

Параметры модели отличаются от параметров реального объекта управления. Поэтому необходимо использовать сигналы

обратной связи по положению и скорости для коррекции расчетных моментов с целью обеспечения необходимой величины управляющего сигнала, подаваемого на двигатели сочленений<sup>1)</sup>.

#### 5.3.1. Передаточная функция одного сочленения робота

В этом разделе излагаются методы получения передаточной функции одного сочленения робота, с помощью которых можно построить пропорционально-дифференциальные регуляторы (ПД-регуляторы). Рассмотрены также методы построения регулятора для многосуставных манипуляторов, движение которых описывается уравнениями Лагранжа — Эйлера или Ньютона — Эйлера. При анализе одно сочленение манипулятора робота трактуется как линейная непрерывная система, к которой для упрощения вычислений может быть применен метод преобразований Лапласа.

Большинство промышленных роботов имеют электрические, гидравлические или пневматические приводы. Манипуляторы с электрическими приводами чаще всего оснащаются двигателями постоянного тока с независимым возбуждением в каждом сочленении. Двигателями постоянного тока являются, как правило, двигатели с постоянным магнитом, якорным возбуждением и с непрерывным вращением выходного вала. Они сочетают в себе такие качества, как высокая мощность, плавность хода, возможность работы на малых скоростях, линейность нагрузочной характеристики и небольшие постоянные времени. Использование постоянного магнитного поля и энергии постоянного тока обеспечивает максимальный момент при минимальной энергии, затрачиваемой на питание, и при минимальном весе. Эти параметры также позволяют снизить индуктивность двигателя и, следовательно, величину постоянной времени, обусловленную электрическими взаимодействиями. На рис. 5.3 приведена эквивалентная схема двигателя постоянного тока с управлением в цепи якоря, который может быть использован в сочленении манипулятора. Основными переменными величинами в этой схеме являются следующие:

- $V_a$  — напряжение якоря, В;
- $V_f$  — напряжение поля, В;
- $L_a$  — индуктивность якоря, Гн;
- $L_f$  — индуктивность поля, Гн;
- $R_a$  — сопротивление якоря, Ом;
- $R_f$  — сопротивление поля, Ом;
- $i_a$  — ток якоря, А;

<sup>1)</sup> Двигатели, встроенные в шарниры звеньев, здесь и далее будем для краткости называть двигателями сочленений. — Прим. ред.

- $i_f$  — ток поля, А;
- $e_b$  — электродвижущая сила, В;
- $\tau$  — момент, развиваемый двигателем, Н·м;
- $\theta_m$  — угловое перемещение вала двигателя, рад;
- $\theta_L$  — угловое перемещение вала нагрузки, рад;
- $J_m$  — момент инерции двигателя, приведенный к валу двигателя, н·м·с<sup>2</sup>/рад;
- $f_m$  — коэффициент вязкого трения двигателя, приведенный к валу двигателя, н·м·с/рад;
- $J_L$  — момент инерции нагрузки, приведенный к валу нагрузки, н·м·с<sup>2</sup>/рад;
- $f_L$  — коэффициент вязкого трения нагрузки, приведенный к валу нагрузки, н·м·с/рад;
- $N_m$  — число зубьев внутреннего редуктора (редуктора двигателя);
- $N_L$  — число зубьев внешнего редуктора (редуктора нагрузки).

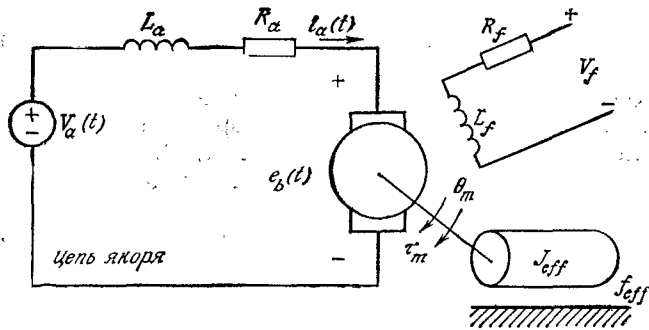


Рис. 5.3. Эквивалентная схема двигателя постоянного тока с управлением в цепи якоря.

Нагруженное звено соединяется с выходным валом двигателя с помощью редуктора — механической системы передач. Как следует из схемы системы передач, показанной на рис. 5.4, общее линейное перемещение редукторов при их взаимодействии одинаково, т. е.

$$d_m = d_L \quad \text{и} \quad r_m \theta_m = r_L \theta_L, \quad (5.3-1)$$

где  $r_m$  и  $r_L$  — соответственно радиусы взаимодействующих шестерен внутреннего и внешнего редуктора. Так как радиус шестерни пропорционален числу зубьев, то

$$N_m \theta_m = N_L \theta_L \quad (5.3-2)$$

или 
$$\frac{N_m}{N_L} = \frac{\theta_L}{\theta_m} = n < 1, \quad (5.3-3)$$

где  $n$  — передаточное отношение, связывающее  $\theta_L$  и  $\theta_m$  следующим образом:

$$\theta_L(t) = n \theta_m(t). \quad (5.3-4)$$

Продифференцировав два раза, получим

$$\dot{\theta}_L(t) = n \dot{\theta}_m(t) \quad (5.3-5)$$

и

$$\ddot{\theta}_L(t) = n \ddot{\theta}_m(t). \quad (5.3-6)$$

Если нагрузка подсоединена к внешнему редуктору, момент,

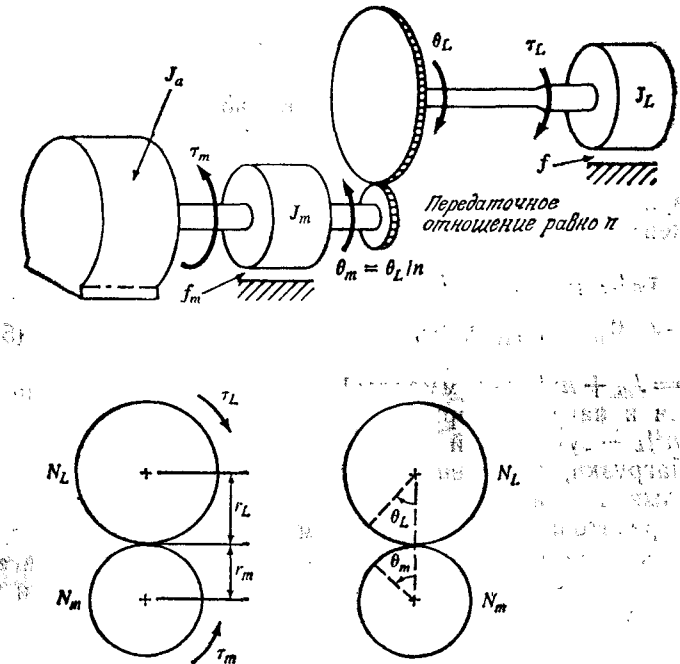


Рис. 5.4. Анализ системы механической передачи.

обеспечиваемый выходным валом двигателя, равен сумме моментов, потребляемых двигателем и нагрузкой.

Таким образом,

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Момент на} \\ \text{валу} \\ \text{двигателя} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Момент} \\ \text{двигателя} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Момент нагрузки,} \\ \text{приведенный} \\ \text{к валу двигателя} \end{array} \right] \quad (5.3-7)$$

или в другой форме

$$\tau(t) = \tau_m(t) + \tau_L^*(t). \quad (5.3-8)$$

Момент нагрузки, приведенный к валу нагрузки, равен

$$\tau_L(t) = J_L \ddot{\theta}_L(t) + f_L \dot{\theta}_L(t), \quad (5.3-9)$$

а момент двигателя, отнесенный к валу двигателя, равен

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + f_m \dot{\theta}_m(t). \quad (5.3-10)$$

По закону сохранения энергии работа, которая производится нагрузкой, приведенной к валу нагрузки  $\tau_L \theta_L$ , должна равняться работе, приведенной к валу двигателя  $\tau_L^* \theta_m$ . Из этого следует, что

$$\tau_L^*(t) = \frac{\tau_L(t) \theta_L(t)}{\theta_m(t)} = n \tau_L(t). \quad (5.3-11)$$

С учетом уравнений (5.3-9), (5.3-5) и (5.3-6) имеем

$$\tau_L^*(t) = n^2 [J_L \ddot{\theta}_m(t) + f_L \dot{\theta}_m(t)]. \quad (5.3-12)$$

Используя уравнения (5.3.10) и (5.3.12), запишем выражение для момента, развиваемого выходным валом двигателя:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau_m(t) + \tau_L^*(t) = (J_m + n^2 J_L) \ddot{\theta}_m(t) + (f_m + n^2 f_L) \dot{\theta}_m(t) = \\ &= J_{\text{eff}} \ddot{\theta}_m(t) + f_{\text{eff}} \dot{\theta}_m(t), \end{aligned} \quad (5.3-13)$$

где  $J_{\text{eff}} = J_m + n^2 J_L$  — суммарный эффективный момент инерции двигателя и нагрузки, приведенный к валу двигателя, а  $f_{\text{eff}} = f_m + n^2 f_L$  — суммарный коэффициент вязкого трения двигателя и нагрузки, приведенный к валу двигателя.

Основываясь на полученных выше результатах, можно определить передаточную функцию рассматриваемой системы одного сочленения манипулятора. Поскольку момент на валу двигателя линейно зависит от тока якоря и не зависит от скорости и углового положения, получим

$$\tau(t) = K_a i_a(t), \quad (5.3-14)$$

где  $K_a$  — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность н·м/А. Используя закон Кирхгофа для контура якоря, получим

$$V_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t), \quad (5.3-15)$$

где  $e_b$  — электродвижущая сила, пропорциональная угловой скорости двигателя:

$$e_b(t) = K_b \dot{\theta}_m(t), \quad (5.3-16)$$

а  $K_b$  — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность В·с/рад. Производя преобразование Лапласа над полу-

ченными уравнениями и решая их относительно  $I_a(s)$ , получим

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - sK_b \Theta_m(s)}{R_a + sL_a}. \quad (5.3-17)$$

В результате выполнения преобразования Лапласа над уравнением (5.3-13) имеем

$$T(s) = s^2 J_{\text{eff}} \Theta_m(s) + s f_{\text{eff}} \Theta_m(s). \quad (5.3-18)$$

Производя преобразование Лапласа над уравнением (5.3-14) и подставляя в него значение  $I_a(s)$  из уравнения (5.3-17), получим

$$T(s) = K_a I_a(s) = K_a \left[ \frac{V_a(s) - sK_b \Theta_m(s)}{R_a + sL_a} \right]. \quad (5.3-19)$$

Приравнявая уравнения (5.3-18) и (5.3-19) и группируя члены, получаем передаточную функцию от напряжения якоря к угловому перемещению вала двигателя

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_a}{s [s^2 J_{\text{eff}} L_a + (L_a f_{\text{eff}} + R_a J_{\text{eff}}) s + R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b]}. \quad (5.3-20)$$

Так как величина постоянной времени двигателя, обусловленная электрическим взаимодействием, намного меньше ее величины,

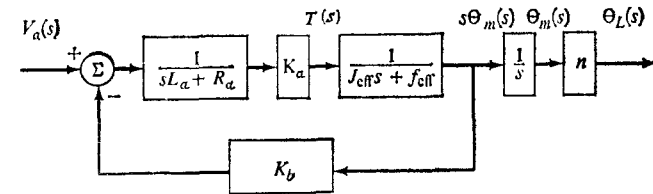


Рис. 5.5. Передаточная функция разомкнутой системы одного сочленения манипулятора робота.

обусловленной механическими факторами, можно пренебречь влиянием индуктивности якоря  $L_a$ . Это позволяет упростить предыдущее уравнение и записать его в виде

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_a}{s (s R_a J_{\text{eff}} + R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b)} = \frac{K}{s (T_m s + 1)}, \quad (5.3-21)$$

$$\text{где } K \triangleq \frac{K_a}{R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b}$$

— передаточный коэффициент двигателя и

$$T_m \triangleq \frac{R_a J_{\text{eff}}}{R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b}$$

— постоянная времени двигателя.

Поскольку выходом системы управления является угловое перемещение сочленения  $[\Theta_L(s)]$ , используя уравнение (5.3-4) и его преобразование Лапласа, можно отнести угловое положение сочленения  $\Theta_L(s)$  к напряжению якоря  $V_a(s)$ , т. е.

$$\frac{\Theta_L(s)}{V_a(s)} = \frac{nK_a}{s(sR_aJ_{\text{eff}} + R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b)}. \quad (5.3-22)$$

Уравнение (5.3-22) является передаточной функцией одного сочленения манипулятора, связывающей прикладываемое напряжение с угловым перемещением сочленения. Блок-схема системы показана на рис. 5.5.

### 5.3.2. Устройство позиционирования для одного сочленения манипулятора

Назначением устройства позиционирования является управление двигателем таким образом, чтобы реальное угловое перемещение сочленения совпадало с желаемым угловым перемещением, определяемым заданной траекторией (см. гл. 4). Управление основано на выработке сигнала ошибки между заданным и действительным угловыми положениями сочленения для выработки соответствующего управляющего напряжения. Другими словами, прикладываемое к двигателю напряжение прямо пропорционально ошибке между заданным и действительным угловыми перемещениями сочленения:

$$V_a(t) = \frac{K_p e(t)}{n} = \frac{K_p [\theta_L^d(t) - \theta_L(t)]}{n}, \quad (5.3-23)$$

где  $K_p$  — коэффициент передачи обратной связи по положению, имеющий размерность В/рад;  $e(t) = \theta_L^d(t) - \theta_L(t)$  — ошибка системы,  $n$  — передаточное отношение, учитывающее приведение управляющего напряжения к валу двигателя. Из уравнения (5.3-23) следует, что значение действительного углового положения сочленения подается на вход системы для выработки сигнала ошибки. Этот сигнал усиливается на величину коэффициента передачи обратной связи по положению  $K_p$  для того, чтобы получить требуемое управляющее напряжение. Таким образом, мы преобразовали систему одного сочленения робота из разомкнутой системы управления, которая описывалась уравнением (5.3-22), в замкнутую систему управления с помощью блока отрицательной обратной связи (рис. 5.6). Текущее угловое положение сочленения может измеряться с помощью оптического кодирующего устройства или потенциометра.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (5.3-23)

$$V_a(s) = \frac{K_p [\Theta_L^d(s) - \Theta_L(s)]}{n} = \frac{K_p E(s)}{n} \quad (5.3-24)$$

и подставляя  $V_a(s)$  в уравнение (5.3-22), получим передаточную функцию разомкнутой системы, связывающую ошибку управляющего сигнала  $[E(s)]$  с текущим положением сочленения:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E(s)} \triangleq G(s) = \frac{K_a K_p}{s(sR_a L_{\text{eff}} + R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b)}. \quad (5.3-25)$$

После нескольких простых алгебраических преобразований можно получить передаточную функцию замкнутой системы,

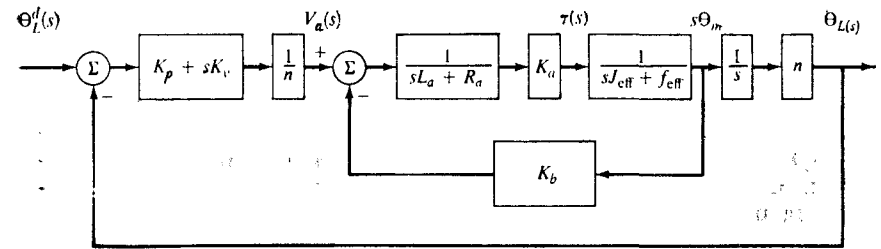


Рис. 5.6. Управление с обратной связью одним сочленением манипулятора.

представляющую собой отношение действительного углового перемещения  $\Theta_L(s)$  к желаемому  $\Theta_L^d(s)$  угловому перемещению:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K_a K_p}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b) + K_a K_p} \\ &= \frac{K_a K_p / R_a f_{\text{eff}}}{s^2 + [(R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b) / R_a J_{\text{eff}}] s + K_a K_p / R_a J_{\text{eff}}}. \end{aligned} \quad (5.3-26)$$

Из уравнения (5.3-26) видно, что пропорциональный регулятор для одного сочленения робота представляет собой систему второго порядка, которая является устойчивой, если все коэффициенты системы положительны. Для того чтобы улучшить динамику системы и уменьшить статическую ошибку, можно увеличить коэффициент передачи обратной связи  $K_p$  и ввести демпфирование в систему путем учета производной от ошибки позиционирования. Угловая скорость сочленения может измеряться тахометром или вычисляться по соответствующим величинам между двумя последовательными положениями сочленения. С учетом этого замечания управляющее напряжение двигателя будет прямо пропорционально ошибке позиционирования и ее производной, т. е.

$$V_a(t) = \frac{K_p [\theta_L^d(t) - \theta_L(t)] + K_v [\dot{\theta}_L^d(t) - \dot{\theta}_L(t)]}{n} = \frac{K_p e(t) + K_v \dot{e}(t)}{n}, \quad (5.3-27)$$

где  $K_v$  — коэффициент передачи обратной связи по производной от ошибки, а  $n$  — передаточное отношение редуктора, учитывающее приведение управляющего напряжения к валу двигателя. Уравнение (5.3-27) отражает тот факт, что кроме обратной связи по положению организуется обратная связь по скорости. Для этого измеряется или вычисляется скорость двигателя с последующим умножением ошибки по скорости на коэффициент обратной связи по скорости  $K_v$ . Поскольку, как это показано в гл. 4, желаемая траектория сочленения может быть описана гладкими полиномиальными функциями, две первые производные которых существуют на интервале  $[t_0, t_f]$ , желаемая скорость может быть вычислена по этим полиномиальным функциям и использована для получения ошибки по скорости в контуре обратной связи. Сумма напряжений, полученных с помощью контуров обратной связи, подается на двигатель сочленения. Соответствующая замкнутая система управления показана на рис. 5.6.

Производя преобразование Лапласа над уравнением (5.3-27) и подставляя  $V_a(s)$  в уравнение (5.3-22), получим передаточную функцию, связывающую сигнал ошибки  $[E(s)]$  с действительным перемещением сочленения:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E(s)} \triangleq G_{PD}(s) = \frac{K_a(K_p + sK_v)}{s(sR_aJ_{\text{eff}} + R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b)} = \frac{K_a K_v s + K_a K_p}{s(sR_aJ_{\text{eff}} + R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b)}. \quad (5.3-28)$$

С помощью простых алгебраических преобразований получаем передаточную функцию замкнутой системы, связывающую действительное угловое перемещение  $[\Theta_L(s)]$  с желаемым угловым перемещением  $[\Theta_L^d(s)]$ :

$$\frac{\Theta_L(s)}{\Theta_L^d(s)} = \frac{G_{PD}(s)}{1 + G_{PD}(s)} = \frac{K_a K_v s + K_a K_p}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p}. \quad (5.3-29)$$

Заметим, что при  $K_v = 0$  уравнение (5.3-29) переходит в уравнение (5.3-26).

Уравнение (5.3-29) описывает систему второго порядка, корень которой расположен на расстоянии  $-K_p/K_v$  в левой полуплоскости на плоскости аргумента  $s$ . Расположение этого корня влияет на величину перерегулирования и на длительность переходного процесса. Система управления манипулятором находится также под действием возмущений  $[D(s)]$  от сил веса и центробежных сил, действующих на звено манипулятора (рис. 5.7). Таким образом, момент, вырабатываемый на валу

двигателя, должен компенсировать моменты, теряемые на самом двигателе, моменты, потребляемые нагрузкой, а также моменты, расходуемые на устранение влияния возмущений. Отсюда с учетом уравнения (5.3-18) получаем

$$T(s) = [s^2 J_{\text{eff}} + s f_{\text{eff}}] \Theta_m(s) + D(s), \quad (5.3-30)$$

где  $D(s)$  — преобразование Лапласа от возмущающих воздействий. Передаточная функция, связывающая возмущения с действительным перемещением сочленения, записывается в виде

$$\frac{\Theta_L(s)}{D(s)} \Big|_{\Theta_L^d(s)=0} = \frac{-nR_a}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p}. \quad (5.3-31)$$

Используя уравнения (5.3-29) и (5.3-31) и принцип суперпозиции, можно получить действительное перемещение сочле-

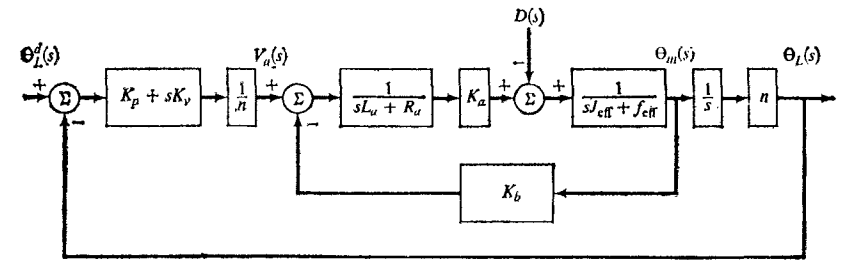


Рис. 5.7. Блок-схема управления с обратной связью манипулятором при наличии возмущений.

нения с учетом двух входных воздействий  $\Theta_L^d(s)$  и  $D(s)$  в следующем виде:

$$\Theta_L(s) = \frac{K_a(K_p + sK_v)\Theta_L^d(s) - nR_a D(s)}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p}. \quad (5.3-32)$$

Ниже рассмотрена работа описанной замкнутой системы, в частности влияние вида входного воздействия на статическую ошибку системы и нахождение значений коэффициентов передачи обратной связи по положению и скорости.

### 5.3.3. Критерии работоспособности и устойчивости

Работа замкнутой системы управления второго порядка основана на таких критериях, как обеспечение хорошей динамики, небольшая или нулевая статическая ошибка и малые времена переходных процессов. Сначала исследуем диапазон значений коэффициентов передачи обратной связи по положению и скорости. В предположении, что возмущения отсутствуют,

из уравнений (5.3-29) и (5.3-31) видно, что мы имеем систему второго порядка с нулевым корнем. Наличие нулевого корня в системе второго порядка обычно приводит к более быстрой обработке заданного значения на входе системы и сопровождается большей величиной перерегулирования по сравнению с системой второго порядка без нулевого корня. Временно пренебрегая эффектом, вызываемым наличием нулевого корня, попытаемся определить значения  $K_p$  и  $K_v$ , которые обеспечивают критическое или надкритическое демпфирование системы.

Напомним, что характеристическое уравнение системы второго порядка может быть записано в следующей стандартной форме:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0, \quad (5.3-33)$$

где  $\zeta$  и  $\omega_n$  — соответственно коэффициент демпфирования и собственная частота колебаний системы. Сравнивая полюсы замкнутых систем, описываемых уравнениями (5.3-29) и (5.3-33), видим, что

$$\omega_n^2 = \frac{K_a K_p}{J_{\text{eff}} R_a} \quad (5.3-34)$$

и

$$2\zeta\omega_n = \frac{R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v}{J_{\text{eff}} R_a}. \quad (5.3-35)$$

Работа системы второго порядка определяется значениями ее собственной частоты колебаний  $\omega_n$  и коэффициентом демпфирования  $\zeta$ . Из соображений безопасности система манипулятора не должна обрабатывать ступенчатое входное воздействие с недостаточным демпфированием. Для обеспечения требуемого в указанном выше смысле режима работы необходимо иметь критическое или надкритическое демпфирование системы, соответствующее значению коэффициента демпфирования, большему или равному единице. Передаточный коэффициент обратной связи по положению определяется из уравнения (5.3-34) для собственной частоты колебаний системы

$$K_p = \frac{\omega_n^2 J_{\text{eff}} R_a}{K_a} > 0. \quad (5.3-36)$$

Подставляя  $\omega_n$  из уравнения (5.3-34) в уравнение (5.3-35), находим, что

$$\zeta = \frac{R_a f_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v}{2 \sqrt{K_a K_p J_{\text{eff}} R_a}} \geq 1, \quad (5.3-37)$$

где равенство дает критическое демпфирование системы, а неравенство соответствует надкритическому демпфированию си-

стемы. Из уравнения (5.3-37) можно найти передаточный коэффициент обратной связи по скорости:

$$K_v \geq \frac{2 \sqrt{K_a K_p J_{\text{eff}} R_a} - R_a f_{\text{eff}} - K_a K_b}{K_a}. \quad (5.3-38)$$

Для устранения колебаний и резонанса конструкции сочленения необходимо выбирать значение частоты собственных колебаний, не превышающее половины величины резонансной частоты конструкции сочленения [229], т. е.

$$\omega_n \leq 0,5\omega_r, \quad (5.3-39)$$

где  $\omega_r$  — резонансная частота конструкции сочленения (рад/с).

Резонансная частота конструкции зависит от материала, из которого изготовлен манипулятор. Если эффективную жесткость сочленения обозначить  $k_{\text{stiff}}$ , то возвращающий момент  $k_{\text{stiff}}\theta_m(t)$  противодействует моменту инерции двигателя:

$$J_{\text{eff}}\ddot{\theta}_m(t) + k_{\text{stiff}}\theta_m(t) = 0. \quad (5.3-40)$$

Производя преобразование Лапласа, получим характеристическое уравнение выражения (5.3-40) в виде

$$J_{\text{eff}}s^2 + k_{\text{stiff}} = 0. \quad (5.3-41)$$

Решение этого уравнения дает резонансную частоту конструкции системы

$$\omega_r = \left( \frac{k_{\text{stiff}}}{J_{\text{eff}}} \right)^{1/2}. \quad (5.3-42)$$

Хотя жесткость сочленения является постоянной величиной, в случае дополнительной нагрузки на манипулятор эффективный момент инерции будет возрастать, что в свою очередь приводит к уменьшению резонансной частоты конструкции. Если резонансная частота конструкции  $\omega_0$  измерена для известного момента инерции, то для другого момента инерции  $J_0$  она определяется по формуле

$$\omega_r = \omega_0 \left( \frac{J_0}{J_{\text{eff}}} \right)^{1/2}. \quad (5.3-43)$$

Используя выражение (5.3-39), находим **ограничения** для  $K_p$  из уравнения (5.3-36):

$$0 < K_p \leq \frac{\omega_0^2 J_{\text{eff}} R_a}{4K_a}. \quad (5.3-44)$$

С учетом уравнения (5.3-43) эти ограничения преобразуются к виду

$$0 < K_p \leq \frac{\omega_0^2 J_0 R_a}{4K_a}. \quad (5.3-45)$$

Зная  $K_p$ , передаточный коэффициент обратной связи по скорости  $K_v$  можно найти из уравнения (5.3-38):

$$K_v \geq \frac{R_a \omega_0 \sqrt{J_0 J_{\text{eff}}} - R_a J_{\text{eff}} - K_a K_b}{K_a} \quad (5.3-46)$$

На следующем этапе исследуются статические ошибки рассматриваемой системы для ступенчатых и непрерывных входных воздействий. Ошибка системы определяется как  $e(t) = \theta_L^d(t) - \theta_L(t)$ . Используя уравнение (5.3-32), ошибку в виде преобразований Лапласа можно записать так

$$E(s) = \theta_L^d(s) - \theta_L(s) = \frac{[s^2 J_{\text{eff}} R_a + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b)] \theta_L^d(s) + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} \quad (5.3-47)$$

Для ступенчатого входного воздействия с амплитудой  $A$ , т. е. при  $\theta_L^d(t) = A$ , и при неизвестном возмущающем входе статическая ошибка системы на ступенчатое входное воздействие может быть найдена из теоремы существования предела:

$$\begin{aligned} e_{ss} (\text{ступенчатое воздействие}) &\triangleq e_{\text{ssp}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{[s^2 J_{\text{eff}} R_a + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b)] A/s + n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{n R_a D(s)}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} \right]. \quad (5.3-48) \end{aligned}$$

Эта ошибка является функцией возмущений. Мы можем заранее определить такие возмущающие воздействия, как сила тяжести и центробежный момент, которые зависят от скорости сочленения. К возмущениям, которые не могут быть точно определены, относятся момент трения в редукторах и помехи в системе. Таким образом, можно идентифицировать каждый из этих моментов отдельно как

$$\tau_D(t) = \tau_G(t) + \tau_C(t) + \tau_e, \quad (5.3-49)$$

где  $\tau_G(t)$  и  $\tau_C(t)$  — соответственно моменты сил тяжести и центробежных сил звена манипулятора, а  $\tau_e$  — остальные возмущающие воздействия, кроме сил тяжести и центробежных сил, значения которых предполагаются равными малой постоянной величине. Соответствующим преобразованием Лапласа уравнения (5.3-49) является следующее уравнение:

$$D(s) = T_G(s) - T_C(s) + \frac{T_e}{s}. \quad (5.3-50)$$

Для того чтобы скомпенсировать силы тяжести и центробежные силы, можно вычислить величины моментов от них и эти значе-

ния подать в устройство управления, как это показано на рис. 5.8, с целью минимизации их влияния. Такая компенсация называется *компенсацией по прямой связи*.

Обозначим вычисленные моменты через  $\tau_{\text{comp}}(t)$ , а их преобразование Лапласа — через  $T_{\text{comp}}(s)$ . Используя эти обозна-

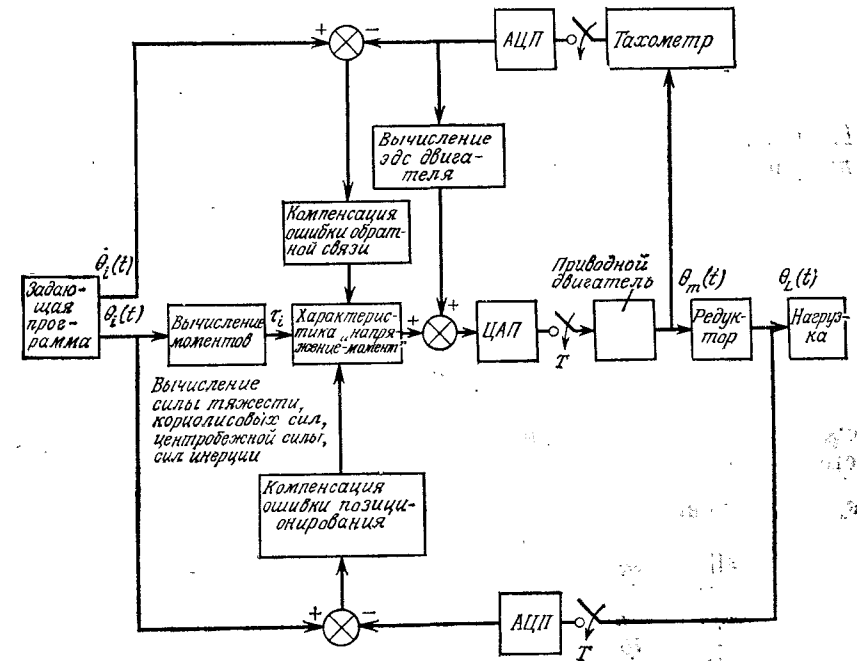


Рис. 5.8. Компенсация возмущений.

чения и уравнение (5.3-50), преобразуем уравнение (5.3-47) к виду

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{[s^2 J_{\text{eff}} R_a + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b)] \theta_L^d(s)}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} + \\ &+ \frac{n R_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{\text{comp}}(s)]}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p}. \quad (5.3-51) \end{aligned}$$

Для ступенчатого входного воздействия  $\theta_L^d(s) = A/s$  статическая ошибка позиционирования системы запишется следующим образом:

$$e_{\text{ssp}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{n R_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{\text{comp}}(s)]}{s^2 R_a J_{\text{eff}} + s(R_a J_{\text{eff}} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} \right]. \quad (5.3-52)$$

При стремлении времени к бесконечности величина погрешности от центробежной силы в статической ошибке позициони-

рования равна нулю. Причина этого состоит в том, что центробежная сила является функцией  $\dot{\theta}_L^2(t)$  и при стремлении времени к бесконечности  $\dot{\theta}_L(\infty)$  стремится к нулю. Следовательно, ее вклад в величину статической ошибки позиционирования равняется нулю. Если момент  $\tau_{comp}(t)$  создается только силой тяжести звена манипулятора, выражение для статической ошибки позиционирования упрощается:

$$e_{ssp} = \frac{nR_a T_e}{K_a K_p}. \quad (5.3-53)$$

Поскольку значение  $K_p$  ограничено неравенством (5.3-45), предыдущее выражение также упрощается:

$$e_{ssp} = \frac{4nT_e}{\omega_0^2 J_0}. \quad (5.3-54)$$

Это выражение является малой величиной, так как значение  $\tau_e$  предполагалось малым. Вычисление  $\tau_G(t)$  рассмотрено ниже (с использованием динамической модели манипулятора).

Если входом системы является непрерывная функция, то  $\Theta_L^d(s) = A/s^2$ , и в предположении, что возмущения определены в соответствии с уравнением (5.3-50), статическая ошибка системы равна

$$\begin{aligned} e_{ss} \text{ (непрерывное воздействие)} &\triangleq e_{ssv} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{[s^2 J_{eff} R_a + s(R_a f_{eff} + K_a K_b)] A/s^2}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} + \\ &+ \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{nR_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{comp}(s)]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p} = \\ &= \frac{(R_a f_{eff} + K_a K_b) A}{K_a K_p} + \\ &+ \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{nR_a [T_G(s) + T_C(s) + T_e/s - T_{comp}(s)]}{s^2 R_a J_{eff} + s(R_a f_{eff} + K_a K_b + K_a K_v) + K_a K_p}. \quad (5.3-55) \end{aligned}$$

Для того чтобы упростить выражение для статической ошибки по скорости, вычислим снова момент  $[\tau_{comp}(t)]$ , эквивалентный действию силы тяжести и центробежной силы. В результате статическая ошибка по скорости запишется в виде

$$e_{ssv} = \frac{(R_a f_{eff} + K_a K_b) A}{K_a K_p} + e_{ssp}. \quad (5.3-56)$$

В это выражение входит конечная статическая ошибка. Вычисление  $\tau_{comp}(t)$  зависит от динамической модели манипулятора. В общем случае, как это показано в гл. 3, уравнения Лагранжа — Эйлера, описывающие движение манипулятора с шестью сочленениями без учета динамики электронного управляющего

блока, трения в редукторе и люфтов, могут быть записаны в виде, соответствующем уравнению (3.2-24):

$$\begin{aligned} \tau_i(t) &= \sum_{k=i}^6 \sum_{j=1}^k \text{Tr} \left[ \frac{\partial^0 \mathbf{T}_k}{\partial q_j} \mathbf{J}_k \left( \frac{\partial^0 \mathbf{T}_k}{\partial q_i} \right)^T \right] \ddot{q}_i(t) + \\ &+ \sum_{r=i}^6 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \text{Tr} \left[ \frac{\partial^{20} \mathbf{T}_r}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{J}_r \left( \frac{\partial^0 \mathbf{T}_r}{\partial q_i} \right)^T \right] \dot{q}_j(t) \dot{q}_k(t) - \\ &- \sum_{j=i}^6 m_j \mathbf{g} \left[ \frac{\partial^0 \mathbf{T}_j}{\partial q_i} \right] \bar{\mathbf{r}}_j \quad \text{для } i=1, 2, \dots, 6, \quad (5.3-57) \end{aligned}$$

где  $\tau_i(t)$  — обобщенный управляющий момент в  $i$ -м сочленении для перемещения  $i$ -го звена,  $\dot{q}_i(t)$  и  $\ddot{q}_i(t)$  — соответственно угловая скорость и угловое ускорение  $i$ -го сочленения,  $q_i$  — обобщенная координата манипулятора, определяющая его угловое положение;  ${}^0 \mathbf{T}_i$  — однородная матрица преобразования для звена размерностью  $4 \times 4$ , которая связывает пространственное расположение между двумя системами координат ( $i$ -й и базовой системами координат),  $\mathbf{r}_i$  — положение центра масс  $i$ -го звена относительно  $i$ -й координаты системы,  $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z, 0)$  — линейный вектор силы тяжести,  $|\mathbf{g}| = 9,8062 \text{ м/с}^2$ ,  $\mathbf{J}_i$  — матрица псевдоинерции  $i$ -го звена относительно системы координат  $i$ -го звена, которая может быть записана в соответствии с уравнением (3.2-18).

Уравнение (5.3-57) может быть выражено в матричной форме в явном виде

$$\sum_{k=1}^6 D_{ik} \ddot{q}_k(t) + \sum_{k=1}^6 \sum_{m=1}^6 h_{ikm} \dot{q}_k(t) \dot{q}_m(t) + c_i = \tau_i(t), \quad i=1, 2, \dots, 6, \quad (5.3-58)$$

где

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i, k)}^6 \text{Tr} \left[ \frac{\partial^0 \mathbf{T}_j}{\partial q_k} \mathbf{J}_j \left( \frac{\partial^0 \mathbf{T}_j}{\partial q_i} \right)^T \right], \quad i, k=1, 2, \dots, 6, \quad (5.3-59)$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i, k, m)}^6 \text{Tr} \left[ \frac{\partial^{20} \mathbf{T}_j}{\partial q_k \partial q_m} \mathbf{J}_j \left( \frac{\partial^0 \mathbf{T}_j}{\partial q_i} \right)^T \right], \quad i, k, m=1, 2, \dots, 6, \quad (5.3-60)$$

$$c_i = \sum_{j=i}^6 \left[ -m_j \mathbf{g} \left( \frac{\partial^0 \mathbf{T}_j}{\partial q_i} \right) \bar{\mathbf{r}}_j \right], \quad i=1, 2, \dots, 6. \quad (5.3-61)$$



Уравнение (5.3-57) можно записать в матричном виде

$$\tau_i(t) = [D_{i1}, D_{i2}, D_{i3}, D_{i4}, D_{i5}, D_{i6}] \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \\ \ddot{q}_4(t) \\ \ddot{q}_5(t) \\ \ddot{q}_6(t) \end{bmatrix} + [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), \dot{q}_4(t), \dot{q}_5(t), \dot{q}_6(t)] \times \begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} & h_{i14} & h_{i15} & h_{i16} \\ h_{i21} & h_{i22} & h_{i23} & h_{i24} & h_{i25} & h_{i26} \\ h_{i31} & h_{i32} & h_{i33} & h_{i34} & h_{i35} & h_{i36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i61} & h_{i62} & h_{i63} & h_{i64} & h_{i65} & h_{i66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \end{bmatrix} + c_i. \quad (5.3-62)$$

Используя уравнения Лагранжа — Эйлера, описывающие движение манипулятора, можно определить моменты силы тяги, центробежной силы и кориолисовых сил для  $i$ -го сочленения соответственно в виде

$$\tau_G(t) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.3-63)$$

и

$$\tau_C(t) = [\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t), \dot{q}_4(t), \dot{q}_5(t), \dot{q}_6(t)] \times \begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} & h_{i14} & h_{i15} & h_{i16} \\ h_{i21} & h_{i22} & h_{i23} & h_{i24} & h_{i25} & h_{i26} \\ h_{i31} & h_{i32} & h_{i33} & h_{i34} & h_{i35} & h_{i36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i61} & h_{i62} & h_{i63} & h_{i64} & h_{i65} & h_{i66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (5.3-64)$$

Эта компенсация соответствует тому, что обычно называют методом обратной задачи динамики или методом вычисления момента.

#### 5.3.4. Устройство управления многосуставным роботом

Одной из основных схем управления манипулятором с несколькими сочленениями является схема, основанная на методе вычисления момента, в котором используются уравнения дви-

жения Лагранжа — Эйлера или Ньютона — Эйлера. По существу метод вычисления момента представляет собой прямое управление, которое, однако, включает компоненты как прямой, так и обратной связи. Такое управление позволяет компенсировать силы взаимодействия между разными сочленениями, при этом компоненты обратной связи позволяют вычислить необходимые корректирующие моменты для компенсации отклонений от желаемой траектории. Предполагается, что могут быть точно определены значения, соответствующие величинам  $D(q)$ ,  $h(q, \dot{q})$  и  $c(q)$  в уравнении движения Лагранжа — Эйлера (3.2-26). Это необходимо для минимизации нелинейных эффектов и использования пропорционально-дифференциального управления двигателями сочленений. Таким образом, закон управления имеет следующую форму:

$$\tau(t) = D_a(q) \{\ddot{q}^d(t) + K_v [\dot{q}^d(t) - \dot{q}(t)] + K_p [q^d(t) - q(t)]\} + h_a(q, \dot{q}) + c_a(q), \quad (5.3-65)$$

где  $K_v$  и  $K_p$  — соответственно матрицы передачи в обратных связях по производной и по положению размерностью  $6 \times 6$  для манипулятора, имеющего 6 степеней подвижности.

Подставляя  $\tau(t)$  из уравнения (5.3-65) в уравнение (3.2-26), имеем

$$D(q) \ddot{q}(t) + h(q, \dot{q}) + c(q) = D_a(q) \{\ddot{q}^d(t) + K_v [\dot{q}^d(t) - \dot{q}(t)] + K_p [q^d(t) - q(t)]\} + h_a(q, \dot{q}) + c_a(q). \quad (5.3-66)$$

Если  $D_a(q)$ ,  $h_a(q, \dot{q})$ ,  $c_a(q)$  соответственно равны  $D(q)$ ,  $h(q, \dot{q})$  и  $c(q)$ , то уравнение (5.3-66) будет иметь вид

$$D(q) [\ddot{e}(t) + K_v \dot{e}(t) + K_p e(t)] = 0, \quad (5.3-67)$$

где  $e(t) \triangleq q^d(t) - q(t)$  и  $\dot{e}(t) \triangleq \dot{q}^d(t) - \dot{q}(t)$ .

Поскольку функция  $D(q)$  всегда несингулярна,  $K_p$  и  $K_v$  могут быть выбраны таким образом, чтобы корни характеристического уравнения (5.3-67) имели отрицательные действительные части, при которых вектор ошибки позиционирования  $e(t)$  асимптотически стремится к нулю.

Вычисление моментов в сочленениях, основанное на использовании уравнений Лагранжа — Эйлера в общем виде, является неэффективным, и поэтому цифровое управление с обратной связью в режиме реального времени, как было показано в работе [226], невозможно или очень сложно реализовать. По этой причине обычно упрощают уравнение (5.3-65), пренебрегая функцией  $h_a(q, \dot{q})$ , зависящей от скорости, и недиагональными элементами матрицы  $D_a(q)$ , характеризующей ускорение. В этом

случае закон управления приобретает форму

$$\tau(t) = \text{diag} [D_a(q)] \{\ddot{q}^d(t) + K_v [\dot{q}^d(t) - \dot{q}(t)] + K_p [q^d(t) - q(t)]\} + C_a(q). \quad (5.3-68)$$

Моделирование на ЭВМ показало, что указанными величинами нельзя пренебрегать в случае движения манипулятора робота с большой скоростью [226].

Аналогичный закон управления манипулятором робота для связанной с сочленениями системы координат может быть получен из уравнений движения Ньютона — Эйлера. Рекурсивный закон управления выводится путем подстановки  $\ddot{q}_i(t)$  в уравнения движения Ньютона — Эйлера для определения необходимого момента на каждом двигателе:

$$\ddot{q}_i(t) = \ddot{q}_i^d(t) + \sum_{j=1}^n K_v^{ij} [\dot{q}_j^d(t) - \dot{q}_j(t)] + \sum_{j=1}^n K_p^{ij} [q_j^d(t) - q_j(t)], \quad (5.3-69)$$

где  $K_v^{ij}$  и  $K_p^{ij}$  — соответственно коэффициенты передач обратных связей по производной и положению для  $i$ -го сочленения, а  $e_j(t) = q_j^d(t) - q_j(t)$  — ошибка позиционирования для  $j$ -го сочленения. Физическая интерпретация использования уравнения (5.3-69) в рекурсивных уравнениях Ньютона — Эйлера может быть представлена следующим образом:

1. Первый член позволяет выработать желаемый управляющий момент для каждого сочленения, если правильно выбрана математическая модель объекта управления и известны физические параметры системы. Однако отклонения от желаемой траектории движения сочленения будут неизбежны из-за наличия в контуре сервомеханизма ошибок от люфтов, трения в редукторе, неопределенности сил инерции и задержек времени.

2. Остальные члены в уравнениях движения Ньютона — Эйлера позволяют выработать корректирующий момент для компенсации малых отклонений от желаемой траектории движения сочленения.

Приведенный рекурсивный закон управления представляет собой пропорционально-дифференциальное управление, компенсирующее действие сил инерции, реакции и тяжести в звеньях манипулятора. Для того чтобы обеспечить критическое демпфирование для каждой из подсистем сочленения, матрицы передач обратной связи  $K_p$  и  $K_v$ , которые являются диагональными, могут быть выбраны в соответствии с методами, рассмотренными в разд. 5.3.3 или в работах [229, 180]. При свободном движении критически демпфированных подсистем предполагается, что вся система ведет себя как критически демпфированная.

Таким образом, метод вычисления моментов представляет собой компенсационное управление по прямой связи. Основы

вываясь на уравнениях движения Лагранжа — Эйлера, записанных в общем виде, управляющие моменты в сочленениях могут быть вычислены за время  $O(n^4)$ . Аналогичный закон управления, полученный с использованием уравнений движения Ньютона — Эйлера, может быть вычислен за время  $O(n)$ . Одним из основных недостатков этого метода управления является зависимость сложности вектора ошибки позиционирования от динамических коэффициентов  $D(q)$ ,  $h(q, \dot{q})$  и  $c(q)$  в уравнениях движения.

### 5.3.5. Компенсация в системах с цифровым управлением

В дискретных системах управления время характеризуется периодом дискретизации  $\Delta t$ , при этом скорость выражается не в радианах в секунду, а в радианах за период  $\Delta t$ . Это определяет изменение инерции звена на величину  $f_s^2$ , где  $f_s$  — частота дискретизации ( $f_s = 1/\Delta t$ ).

Обычно используется частота дискретизации 60 Гц с периодом дискретизации 16 мс. Это объясняется ее распространенностью и тем, что большинство манипуляторов имеет механическую резонансную частоту приблизительно в диапазоне 5—10 Гц. Хотя из дискретной теоремы Найквиста следует, что отношение частоты дискретизации к частоте среза системы для возможности воспроизведения сигнала должно быть по крайней мере не меньше двух, для систем непрерывного времени это отношение увеличивается. Для того чтобы улучшить работу системы при дискретизации, частота дискретизации должна быть много больше собственной частоты манипулятора, и наоборот, период дискретизации должен быть много меньше наименьшей постоянной времени манипулятора. Таким образом, для минимизации погрешностей от дискретизации обычно выбирается частота дискретизации, в 20 раз превышающая частоту среза системы, т. е.

$$\Delta t = \frac{1}{20\omega_n/2\pi} = \frac{1}{20f_n}. \quad (5.3-70)$$

### 5.3.6. Зависимость момента от напряжения

Теоретически момент в двигателе постоянного тока с управлением в цепи якоря является линейной функцией напряжения якоря. Однако в действительности зависимость момента от напряжения нелинейна из-за влияния трения при малых моментах и из-за явлений насыщения при больших моментах. По этим причинам численное преобразование вычисленного момента в требуемое входное напряжение обычно уточняется с помощью табличных значений или вычислений по приближенным формулам. Выходное напряжение реализуется, как правило, в виде

сигналов постоянной величины или в виде импульсов различной ширины. Типичная кривая преобразования напряжения в момент показана на рис. 5.9, где  $V_\phi$  — управление двигателем, при котором сочленение перемещается с постоянной скоростью, не вызывая усилий в направлении движения, а  $F_\phi$  — сила или мо-

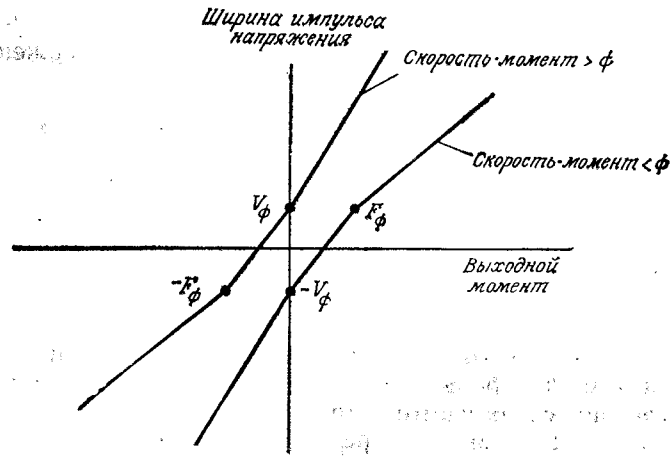


Рис. 5.9. График зависимости напряжение — вращающий момент.

мент, которые сочленение развивает при управлении  $V_\phi$  с отрицательной скоростью. Величины наклонов и их приращения получены из экспериментальных кривых.

#### 5.4. СУБОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ

Для большинства производственных задач желательно перемещать манипулятор с наивысшей скоростью для того, чтобы минимизировать время выполнения заданного технологического цикла. Это вызвало необходимость исследовать задачу оптимального по быстродействию управления для механических манипуляторов [140]. Целью оптимального по быстродействию управления является перемещение рабочего органа манипулятора из начального положения в заданное за минимальное время.

Рассмотрим кратко основы оптимального по быстродействию управления на примере шестизвенного манипулятора. Уравнения движения шестизвенного робота в пространстве состояний можно получить из уравнений движения Лагранжа — Эйлера. Определим вектор состояния манипулятора размерностью  $2n$

в виде

$$\mathbf{x}^T(t) = [\mathbf{q}^T(t), \dot{\mathbf{q}}^T(t)] = [q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)] \triangleq \triangleq [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t)] \triangleq [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2n}(t)] \quad (5.4-1)$$

и входной вектор управления размерностью  $n$  в виде

$$\mathbf{u}^T(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t), \dots, \tau_n(t)]. \quad (5.4-2)$$

В пространстве состояний уравнения движения Лагранжа — Эйлера могут быть записаны в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \quad (5.4-3)$$

где  $\mathbf{f}(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая вектор-функция размерностью  $2n \times 1$ . Поскольку функция  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  всегда несингулярна, приведенное уравнение может быть записано следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$$

и

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{f}_2[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{b}[\mathbf{x}_1(t)] \mathbf{u}(t), \quad (5.4-4)$$

где  $\mathbf{f}_2(\mathbf{x})$  — вектор-функция размерностью  $n \times 1$ :

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_1)[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1)]. \quad (5.4-5)$$

Можно показать, что величина  $\mathbf{b}(\mathbf{x}_1)$  эквивалентна матрице  $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}_1)$ .

Предполагается, что в начальный момент времени  $t = t_0$  система находится в исходном состоянии  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , а в конечный момент времени система должна находиться в заданном конечном состоянии  $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ . Кроме того, предполагается, что допустимые управляющие воздействия ограничены по величине и удовлетворяют неравенству

$$|u_i| \leq (u_i)_{\max} \quad \text{для всех } t. \quad (5.4-6)$$

Таким образом, задача оптимального по быстродействию управления заключается в нахождении допустимого управления, которое переводит систему из начального состояния  $\mathbf{x}_0$  в конечное состояние  $\mathbf{x}_f$  и минимизирует рабочий критерий (выражение 5.4-7), удовлетворяя ограничениям (5.4-6):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0. \quad (5.4-7)$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [145] оптимальное управление, которое минимизирует приведенный выше функционал  $J$ , должно минимизировать гамильтониан.

Для получения оптимального вектора управления  $\mathbf{v}^*(t)$  необходимо, чтобы оптимальный вектор состояния  $\mathbf{x}^*(t)$ , оптимальные сопряженные переменные  $\mathbf{p}^*(t)$  и функция Гамильтона

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}) = \mathbf{p}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + 1 \quad (5.4-8)$$

удовлетворяли условиям

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial H(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_f], \quad (5.4-9)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = - \frac{\partial H(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_f] \quad (5.4-10)$$

$$\text{и } H(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*) \leq H(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*) \quad \text{для всех } t \in [t_0, t_f] \quad (5.4-11)$$

на интервале допустимых управлений. После подстановки  $\mathbf{v}^*(t)$  из уравнения (5.4-8) в (5.4-11) задача оптимизации сводится к двухточечной краевой задаче с граничными условиями на состояние  $\mathbf{x}(t)$  в начальный и конечный моменты времени. Так как уравнения движения нелинейны, единственным способом решения задачи управления в этом случае является численное решение. Однако численное решение не учитывает действия возмущений в системе, а позволяет только вычислить управляющую функцию разомкнутой системы. Кроме того, такое решение оптимально только для заданных начальных и конечных условий. Следовательно, вычисление оптимального управления должно осуществляться для каждого движения манипулятора. Кроме того, на практике численные методы не обеспечивают достаточной точности управления механическими манипуляторами. По этим причинам в качестве альтернативы численному решению [140] можно использовать аппроксимацию оптимального управления, результатом которой является получение субоптимального по быстродействию управления.

Субоптимальное управление с обратной связью находится путем аппроксимации нелинейной системы, описываемой уравнениями (5.4-4), линейной системой и последующего аналитического нахождения оптимального управления для линейной системы. Линейная система получается заменой переменных после линеаризации уравнений движений. Преобразование используется для записи в явном виде управляющих воздействий в линеаризованной системе. Обозначая новый ряд зависимых переменных через  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , уравнения движения могут быть с использованием новых переменных состояния записаны в виде

$$\dot{\xi}_i(t) = x_i(t) - x_i(t_f), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.4-12)$$

$$\text{и } \dot{\xi}_i(t) = x_i(t), \quad i = n + 1, \dots, 2n.$$

Первый набор  $n\xi_i(t)$  характеризует ошибку углового положения, а второй набор  $n\xi_i(t)$  — ошибку скорости изменения угло-

вого положения. В результате такой замены переменных задача управления сводится к задаче перемещения системы из начального состояния  $\xi(t_0)$  в начало координат пространства  $\xi$  переменных. Для того чтобы получить линеаризованную систему, уравнение (5.4-12) подставляется в уравнение (5.4-4) и используется разложение в ряд Тейлора в начале координат пространства  $\xi$  переменных. Кроме того, все тригонометрические функции также разлагаются в соответствующие ряды. В результате линеаризованные уравнения движения будут иметь вид

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{A}\xi(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \quad (5.4-13)$$

где  $\xi^T(t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и  $\mathbf{v}(t)$  — связаны с  $\mathbf{u}(t)$  соотношением  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{c}$ . Вектор  $\mathbf{c}$  содержит статические моменты сил тяжести в конечном состоянии. Несмотря на то что уравнение (5.4-13) является линейным, управляющая функция в нем  $\mathbf{v}(t)$  записана в неявном виде. Путем соответствующего отбора определяющих векторов из линейно независимых столбцов управляемых матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  для выделения управляющей функции можно получить новый набор уравнений:

$$\dot{\xi}(t) = \bar{\mathbf{A}}\xi(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{v}(t). \quad (5.4-14)$$

Если в качестве примера взять трехзвенный манипулятор и написать для него уравнения, приведенные выше, можно получить систему с двумя интеграторами для каждого из трех звеньев и несимметричными ограничениями на величину управляющего воздействия:

$$\dot{\xi}_{2i-1}(t) = v_i, \quad \dot{\xi}_{2i}(t) = \xi_{2i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.4-15)$$

где  $v_i^- \leq v_i \leq v_i^+$  и

$$v_i^+ = (u_i)_{\max} + c_i, \quad v_i^- = -(u_i)_{\max} + c_i, \quad (5.4-16)$$

$c_i$  есть  $i$ -й элемент вектора  $\mathbf{c}$ .

После этого получение оптимального по быстродействию управления и переключающих поверхностей<sup>1)</sup> можно осуществить обычными способами. Линеаризованное и записанное в явном виде с помощью уравнений (5.4-15) и (5.4-16) субоптимальное управление, как правило, обеспечивает в достаточной степени близкие к оптимальным динамику и траектории движения манипулятора. Однако этот метод является слишком сложным,

<sup>1)</sup> Напомним, что оптимальное по быстродействию управление представляет собой кусочно-постоянную функцию времени. Таким образом, интерес представляют те области пространства состояний, в которых управление постоянно. Эти области разделяются линиями в двумерном пространстве, поверхностями — в трехмерном пространстве и гиперповерхностями — в  $n$ -мерном пространстве. Такие разделяющие поверхности называют соответственно линиями переключения, поверхностями переключения и гиперповерхностями переключения.

если объектом управления служит манипулятор с четырьмя и более степенями свободы; кроме того, он не учитывает влияние неизвестных внешних нагрузок.

### 5.5. УПРАВЛЕНИЕ МАНИПУЛЯТОРОМ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Использование теории систем с переменной структурой для управления манипуляторами было предложено в работе [320]. Системы с переменной структурой (СПС) относятся к классу систем с дискретным управлением по обратной связи. В течение последних 20 лет теория систем с переменной структурой находит многочисленные применения в различных отраслях металлургической, химической и космической промышленности. Основной особенностью СПС является наличие так называемого скользящего режима на поверхности переключения. В скользящем режиме система не реагирует на изменение параметров и на возмущающие воздействия, а ее траектории проходят по поверхности переключения. Это свойство СПС позволяет исключить влияние сил взаимодействия между сочленениями манипулятора. Явление скользящего режима не зависит от параметров системы и носит стабильный характер. Таким образом, теория СПС может быть использована для создания устройства управления переменной структурой (УУПС), которое организует скользящий режим при формировании траекторий движения манипулятора робота. Для создания такого устройства управления не требуется использование точной динамической модели манипулятора и достаточно знать граничные значения параметров модели. Управление переменной структурой отличается от оптимального по быстрдействию управления тем, что оно формирует траектории движения системы в скользящем режиме. Кроме того, система в этом режиме нечувствительна к изменению параметров.

Пусть требуется найти управление переменной структурой для шестизвенного манипулятора. Определяя вектор состояния из уравнения (5.4-1)

$$\mathbf{x}^T = (q_1, \dots, q_6, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6) = (p_1, \dots, p_6, v_1, \dots, v_6) = (\mathbf{p}^T, \mathbf{v}^T) \quad (5.5-1)$$

и вводя вектор ошибки позиционирования  $\mathbf{e}_1(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^d$ , а также вектор ошибки по скорости  $\mathbf{e}_2(t) = \mathbf{v}(t)$  ( $\mathbf{v}^d = 0$ ), сведем задачу слежения к задаче стабилизации. Уравнения ошибки системы будут иметь вид

$$\dot{\mathbf{e}}_1(t) = \mathbf{v}(t)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{p}^d, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{p}^d) \mathbf{u}(t), \quad (5.5-2)$$

где  $\mathbf{f}_2$  и  $\mathbf{b}$  определяются из выражения (5.4-5). Для системы стабилизации управление переменной структурой может быть записано в виде

$$u_i(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{p}, \mathbf{v}), & \text{если } s_i(e_i, v_i) > 0, \\ u_i^-(\mathbf{p}, \mathbf{v}), & \text{если } s_i(e_i, v_i) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5.5-3)$$

где  $s_i(e_i, v_i)$  — поверхности переключения, удовлетворяющие условиям

$$s_i(e_i, v_i) = c_i e_i + v_i, \quad c_i > 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.5-4)$$

После этого синтез управления сводится к выбору управления с обратной связью в соответствии с уравнением (5.5-3) так, чтобы скользящий режим происходил на пересечении с поверхностями переключения.

Решая алгебраические уравнения поверхностей переключения

$$\dot{s}_i(e_i, v_i) = 0, \quad i = 1, \dots, 6, \quad (5.5-5)$$

можно отыскать единственно существующее управление

$$\mathbf{u}_{eq} = -\mathbf{D}(\mathbf{p})(\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \mathbf{C}\mathbf{v}), \quad (5.5-6)$$

где  $\mathbf{C} \equiv \text{diag}[c_1, c_2, \dots, c_6]$ . После этого скользящий режим получается из уравнения (5.5-4) в виде

$$\dot{e}_i = -c_i e_i, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (5.5-7)$$

Это уравнение в явном виде описывает движение шести линейных систем первого порядка, каждое из которых представляет одну степень свободы манипулятора при нахождении системы в скользящем режиме. Как видно из уравнения (5.5-3), устройство управления переводит манипулятор в скользящий режим, при этом влияние сил взаимодействия между сочленениями полностью исключается. Для управления манипулятором в скользящем режиме используется устройство управления, реализующее управление в соответствии с уравнением (5.5-6). Динамика манипулятора в скользящем режиме зависит только от конструктивных параметров  $c_i$ . Асимптотическая устойчивость систем в скользящем режиме обеспечивается при выборе  $c_i > 0$ , а регулирование скорости движения в этом режиме достигается изменением параметров  $c_i$ .

Таким образом, управление переменной структурой позволяет исключить нелинейные силы взаимодействия между сочленениями путем перевода системы в скользящий режим. Однако устройство управления вырабатывает сигналы дискретного управления по обратной связи, которые весьма быстро меняют знак управляющего воздействия. В результате действия таких сигналов может появиться вибрация, которую необходимо учи-

тывать в некоторых применениях управления манипулятором робота. Более подробно многовходовые управляющие устройства для СПС описаны в работе [320].

## 5.6. НЕЛИНЕЙНОЕ НЕЗАВИСИМОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Нелинейное независимое управление по обратной связи является важной частью теории нелинейного управления. На его основе может быть выработано субоптимальное управление для механических манипуляторов. В большинстве существующих алгоритмов управления роботами (например, в методе вычисления моментов) значительное внимание уделяется нелинейной компенсации сил взаимодействия между звеньями манипулятора. В работе [118] применен метод нелинейного управления по обратной связи к простой шаговой системе, которая содержала определенный класс нелинейностей, включающий тригонометрические и полиномиальные виды нелинейностей. В результате были получены независимые подсистемы, позиционная устойчивость и желаемые периодические траектории. В этой работе подход отличается от метода линейного разделения системы, где расчлененная система должна быть линейной. В работе [258] предложен итеративный алгоритм для последовательного усовершенствования нелинейного субоптимального закона управления. Он дает возможность приблизиться к получению оптимального управления манипулятором. С другой стороны, для того чтобы достичь такого высокого качества управления, этот метод требует значительного времени вычисления. Ниже кратко описана нелинейная теория декомпозиции по работам [75, 86]. В этой теории используются уравнения движения Ньютона — Эйлера для построения нелинейного независимого управления манипуляторами робота.

Пусть основная нелинейная система задана в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}(t) \\ \text{и} \quad \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5.6-1)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $n$ -мерный вектор,  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  —  $m$ -мерные векторы, а  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  — матрицы соответствующих порядков. Определим нелинейный оператор  $N_A^K$  в виде

$$N_A^K C_i(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} N_A^{K-1} C_i(\mathbf{x}) \right] \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \begin{matrix} K = 1, 2, \dots, n, \\ i = 1, 2, \dots, m, \end{matrix} \quad (5.6-2)$$

где  $C_i(\mathbf{x})$  —  $i$ -я компонента  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ , а  $N_A^0 C_i(\mathbf{x}) = C_i(\mathbf{x})$ . Определим также порядок  $d_i$  нелинейной системы как

$$d_i = \min \left\{ j : \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} N_A^{j-1} C_i(\mathbf{x}) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (5.6-3)$$

Целью управления является нахождение независимого управления по обратной связи  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t), \quad (5.6-4)$$

где  $\mathbf{w}(t)$  —  $m$ -мерный входной вектор,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  — вектор обратной связи размерностью  $m \times 1$ , определяющий разделение и расположение полюсов, а  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  — входная передаточная матрица размерностью  $m \times m$ , такая, что вся система имеет независимые связи входов и выходов.

Подставляя  $\mathbf{u}(t)$  из уравнения (5.6-4) в систему уравнений (5.6-1), запишем результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \\ \text{и} \quad \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.6-5)$$

Для того чтобы получить независимые связи входов и выходов в указанной системе,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  выбираются соответственно

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1^*(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2^*(\mathbf{x}), \quad (5.6-6)$$

где

$$\mathbf{F}_1^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x})\mathbf{C}^*(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{F}_2^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x})\mathbf{M}^*(\mathbf{x})$$

и

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{*-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}.$$

$\mathbf{F}_1^*(\mathbf{x})$  представляет обратную связь в системе декомпозиции, а  $\mathbf{F}_2^*(\mathbf{x})$  является управляющей частью с произвольным расположением полюсов. Входной передаточный коэффициент выделенной части может быть выбран с помощью  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ , а  $\mathbf{D}^*(\mathbf{x})$  — матрица размерностью  $m \times m$ ,  $i$ -я строка которой записывается в виде

$$\mathbf{D}_i^*(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} N_A^{d_i-1} C_i(\mathbf{x}) \right] \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \text{для } d_i \neq 0. \quad (5.6-7)$$

$\mathbf{C}^*(\mathbf{x})$  —  $m$ -мерный вектор,  $i$ -я компонента которого равна

$$C_i^*(\mathbf{x}) = N_A^{d_i} C_i(\mathbf{x}). \quad (5.6-8)$$

$\mathbf{M}^*(\mathbf{x})$  —  $m$ -мерный вектор,  $i$ -я компонента которого записывается в виде

$$M_i^*(\mathbf{x}) = \sum_{K=0}^{d_i-1} \alpha_{K,i} N_A^K C_i(\mathbf{x}) \quad \text{для } d_i \neq 0, \quad (5.6-9)$$

а  $\mathbf{A}$  — диагональная матрица, элементы которой являются постоянными величинами  $\lambda_i$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ . Теперь система

уравнений (5.6-1) может быть записана в виде

$$y^*(t) = C^*(x) + D^*(x) u(t), \quad (5.6-10)$$

где  $y^*(t)$  — выходной вектор,  $i$ -й компонентой которого является  $y_i^{(d_i)}(t)$ , т. е.

$$y_i^{(d_i)}(t) = C_i^*(x) + D_i^* u(t). \quad (5.6-11)$$

Используя уравнения (5.6-4) и (5.6-6) в уравнении (5.6-11), получим

$$y_i^{(d_i)}(t) + \alpha_{d_i-1, i} y_i^{(d_i-1)}(t) + \dots + \alpha_{0, i} y_i(t) = \lambda_i \omega_i(t), \quad (5.6-12)$$

где  $\alpha_{k, i}$  и  $\lambda_i$  — произвольные скалярные величины.

Для того чтобы показать, что  $i$ -я компонента имеет вид уравнения (5.6-11), предположим, что  $d_i = 1$ . Тогда  $y_i(t) = C_i(x)$ , и после дифференцирования получим

$$\begin{aligned} y_i^{(1)}(t) = \dot{y}_i(t) &= \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} \dot{x}(t) = \\ &= \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} [A(x) + B(x)F(x) + B(x)G(x)w(t)] = \\ &= N_{A+BF}^1 C_i(x) + \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} [B(x)G(x)w(t)]. \end{aligned}$$

Используя аналогию

$$N_{A+BF}^{d_i} C_i(x) = N_A^{d_i} C_i(x) + [\partial/\partial x N_A^{d_i-1} C_i(x)] B(x) F(x),$$

$y_i^{(1)}(t)$  можно записать в виде

$$y_i^{(1)}(t) = N_A^{d_i} C_i(x) + \left[ \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} \right] B(x) F(x) + \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} [B(x)G(x)w(t)].$$

С помощью уравнений (5.6-4) и (5.6-7) это выражение можно записать также в виде

$$y_i^{(1)}(t) = C_i^*(x) + D_i^*(x) u(t).$$

Легко показать, что и значения  $d_i = 2, 3, \dots$  приводят к уравнению (5.6-11). Таким образом, результирующая система имеет разделенные связи входов и выходов и представляет собой не зависящую от времени систему второго порядка, которая может быть использована для моделирования каждого сочленения манипулятора робота.

Как было показано в гл. 3, уравнения движения Лагранжа — Эйлера для шестизвенного робота могут быть записаны в виде

$$\begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{16} & \dots & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(\theta, \dot{\theta}) \\ \vdots \\ h_6(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1(\theta) \\ \vdots \\ c_6(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_6(t) \end{bmatrix} \quad (5.6-13)$$

или в векторно-матричной форме

$$D(\theta) \ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta) = u(t), \quad (5.6-14)$$

где  $u(t)$  — вектор управляющего момента для двигателя в сочленении размерностью  $6 \times 1$ ,  $\theta(t)$  — вектор угловых положений,  $\dot{\theta}(t)$  — вектор угловых скоростей,  $\ddot{\theta}(t)$  — вектор ускорения размерностью  $6 \times 1$ ,  $c(\theta)$  — вектор силы тяжести размерностью  $6 \times 1$ ,  $h(\theta, \dot{\theta})$  — вектор кориолисовых и центробежных сил размерностью  $6 \times 1$ , а  $D(\theta)$  — матрица инерции размерностью  $6 \times 6$ . Поскольку  $D(\theta)$  — всегда несингулярна, последнее уравнение может быть записано в виде

$$\ddot{\theta}(t) = -D^{-1}(\theta) [h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)] + D^{-1}(\theta) u(t) \quad (5.6-15)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(t) &= - \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{16} & \dots & D_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_1(\theta, \dot{\theta}) + c_1(\theta) \\ \vdots \\ h_6(\theta, \dot{\theta}) + c_6(\theta) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{16} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{16} & \dots & D_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_6(t) \end{bmatrix}. \quad (5.6-16) \end{aligned}$$

Приведенная динамическая модель состоит из дифференциальных уравнений второго порядка для каждой переменной сочленения, следовательно, в этом случае  $d_i = 2$ . Трактую каждую переменную сочленения  $\theta_i(t)$  как выходную переменную, последнее уравнение может быть связано с уравнением (5.6-11) следующим образом:

$$\begin{aligned} y_i^{(2)}(t) = \ddot{y}_i(t) &= - [D^{-1}(\theta)]_i [h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)] + [D^{-1}(\theta)]_i u(t) = \\ &= C_i^*(x) + D_i^*(x) u(t), \quad (5.6-17) \end{aligned}$$

где

$$C_i^*(x) = -[D^{-1}(\theta)]_i [h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)] \quad (5.6-18)$$

$$x^T(t) = [\theta^T(t), \dot{\theta}^T(t)]$$

и

$$D_i^*(x) = [D^{-1}(\theta)]_i, \quad (5.6-19)$$

а  $[D^{-1}(\theta)]_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $D^{-1}(\theta)$ . Таким образом, управление  $u(t)$  для выделенной системы (уравнение (5.6-5)) должно быть следующим:

$$\begin{aligned} u(t) &= -D^{*-1}(x) [C^*(x) + M^*(x) - \Lambda w(t)] = \\ &= -D(\theta) \{-D^{-1}(\theta) [h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)] + M^*(x) - \Lambda w(t)\} = \\ &= h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta) - D(\theta) [M^*(x) - \Lambda w(t)]. \end{aligned} \quad (5.6-20)$$

Подробнее для  $i$ -го сочленения управление запишется в виде

$$u_i(t) = h_i(\theta, \dot{\theta}) + c_i(\theta) - [D_{i1} \dots D_{i6}] \times \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \dot{\theta}_1(t) + \alpha_{01} \theta_1(t) - \lambda_1 \omega_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{i6} \dot{\theta}_6(t) + \alpha_{06} \theta_6(t) - \lambda_6 \omega_6(t) \end{bmatrix} \quad (5.6-21)$$

Из этого уравнения видно, что управление  $u_i(t)$  для  $i$ -го сочленения зависит только от текущих динамических переменных и от входного воздействия  $w(t)$ . Подставляя  $u(t)$  из уравнения (5.6-20) в уравнение (5.6-14), получим

$$\begin{aligned} D(\theta) \ddot{\theta}(t) + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta) = \\ = h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta) - D(\theta) \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \dot{\theta}_1(t) + \alpha_{01} \theta_1(t) - \lambda_1 \omega_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{i6} \dot{\theta}_6(t) + \alpha_{06} \theta_6(t) - \lambda_6 \omega_6(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6-22)$$

Отсюда

$$D(\theta) \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) + \alpha_{i1} \dot{\theta}_1(t) + \alpha_{01} \theta_1(t) - \lambda_1 \omega_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_6(t) + \alpha_{i6} \dot{\theta}_6(t) + \alpha_{06} \theta_6(t) - \lambda_6 \omega_6(t) \end{bmatrix} = 0. \quad (5.6-23)$$

Так как  $D(\theta)$  — всегда несингулярна, последнее уравнение можно записать в виде

$$\ddot{\theta}_i(t) + \alpha_{i1} \dot{\theta}_i(t) + \alpha_{0i} \theta_i(t) = \lambda_i \omega_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.6-24)$$

из которого следует полное разделение связей входов и выходов системы. Отметим, что параметры  $\alpha_{i1}$ ,  $\alpha_{0i}$  и  $\lambda_i$  можно выбрать произвольно, обеспечивая соблюдение критерия устойчивости. Следовательно, манипулятор можно представить в виде шести независимых, записанных в явном виде и инвариантных ко времени систем второго порядка, а управление  $u(t)$  (уравнение (5.6-20)) можно строить на основе динамики манипулятора. Эффективным путем вычисления уравнения  $u(t)$  является использование уравнений движения Ньютона — Эйлера. Таким образом, для получения управления  $u_i(t)$  для  $i$ -го сочленения необходимо подставить значение  $\ddot{\theta}_i(t)$  вместе с выражением  $\lambda_i \omega_i(t) - \alpha_{i1} \dot{\theta}_i(t) - \alpha_{0i} \theta_i(t)$  в уравнения движения Ньютона — Эйлера.

## 5.7. НЕЗАВИСИМОЕ ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ

В предыдущем разделе мы рассмотрели некоторые методы управления механическим манипулятором в связанных координатах для формирования траектории сочленения. Во многих приложениях более предпочтительным является программное управление движением, которое обеспечивает движение манипулятора в декартовых координатах по требуемой траектории с необходимой скоростью. Независимое программное управление предполагает комбинированное движение различных двигателей сочленений и отдельные управляемые движения звеньев манипулятора вдоль осей неподвижной системы координат. Это означает, что несколько двигателей сочленений должны работать одновременно с различными изменяющимися скоростями для формирования заданного движения манипулятора вдоль любой оси неподвижной системы координат. Это делает возможным выбор направления и скорости произвольной траектории движения манипулятора. Такое управление существенно упрощает набор последовательности движений для выполнения поставленной задачи, потому что пользователю обычно легче ориентироваться в декартовой системе координат, чем в угловой системе координат сочленения манипулятора.

Как правило, требуемое движение манипулятора записывается в виде временных траекторий манипулятора в декартовых координатах, хотя система управления оперирует входными воздействиями, относящимися к связанным с сочленениями координатам. Математическая связь между этими двумя системами координат необходима для получения эффективного управления в декартовом пространстве. Коротко опишем основную кинематическую теорию, связывающую две системы координат для шестизвенного манипулятора робота. Это приведет к по-



ниманию важнейших методов независимого программного управления движением.

Положение конечного звена манипулятора относительно фиксированной системы координат может быть определено путем расположения ортогональной системы координат на этом звене, т. е. путем введения системы координат конечного звена (рис. 5.10). Задача нахождения положения конечного звена при этом сводится к определению положения и ориентации системы

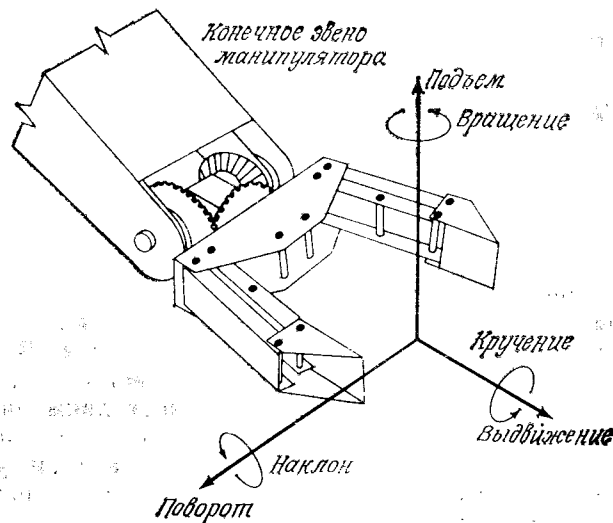


Рис. 5.10 Система координат конечного звена.

координат конечного звена относительно инерциальной системы координат манипулятора. Для этого используется однородная матрица преобразования размерностью  $4 \times 4$ :

$$\begin{aligned} \text{база } \mathbf{T}_{\text{конечное звено}}(t) &= \begin{bmatrix} n_x(t) & s_x(t) & a_x(t) & p_x(t) \\ n_y(t) & s_y(t) & a_y(t) & p_y(t) \\ n_z(t) & s_z(t) & a_z(t) & p_z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) & \mathbf{s}(t) & \mathbf{a}(t) & \mathbf{p}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.7-1)$$

где  $\mathbf{p}$  — вектор положения конечного звена, а  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{a}$  — единичные векторы, направленные вдоль основных осей системы координат, определяющие ориентацию конечного звена. Вместо использования подматрицы вращения  $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$  для определения ориентации можно использовать три угла Эйлера — угол поворота  $\alpha(t)$ , наклона  $\beta(t)$  и вращения  $\gamma(t)$ , которые определяются

как вращение системы координат конечного звена соответственно вокруг осей  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  базовой системы координат. Элементы  $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$  можно получить из матрицы вращения Эйлера как результат вращения по углу  $\alpha$  вокруг оси  $x_0$ , по углу  $\beta$  вокруг оси  $y_0$  и по углу  $\gamma$  вокруг оси  $z_0$  базовой системы координат (уравнения (2.2-19)). Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{база } \mathbf{R}_{\text{конечное звено}}(t) &= \begin{bmatrix} n_x(t) & s_x(t) & a_x(t) \\ n_y(t) & s_y(t) & a_y(t) \\ n_z(t) & s_z(t) & a_z(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\gamma & -S\gamma & 0 \\ S\gamma & C\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C\gamma C\beta & -S\gamma C\alpha + C\gamma S\beta S\alpha & S\gamma S\alpha + C\gamma S\beta C\alpha \\ S\gamma C\beta & C\gamma C\alpha + S\gamma S\beta S\alpha & -C\gamma S\alpha + S\gamma S\beta C\alpha \\ -S\beta & C\beta S\alpha & C\beta C\alpha \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.7-2)$$

где  $\sin \alpha \equiv S\alpha$ ,  $\cos \alpha \equiv C\alpha$ ,  $\sin \beta \equiv S\beta$ ,  $\cos \beta \equiv C\beta$ ,  $\sin \gamma \equiv S\gamma$ ,  $\cos \gamma \equiv C\gamma$ .

Определим векторы положения  $\mathbf{p}(t)$ , углов Эйлера  $\Phi(t)$ , линейной скорости  $\mathbf{v}(t)$  и угловой скорости  $\Omega(t)$  конечного звена манипулятора в базовой системе координат соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &\triangleq [p_x(t), p_y(t), p_z(t)]^T, \quad \Phi(t) \triangleq [\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)]^T, \\ \mathbf{v}(t) &\triangleq [v_x(t), v_y(t), v_z(t)]^T, \quad \Omega(t) \triangleq [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]^T. \end{aligned} \quad (5.7-3)$$

Линейная скорость конечного звена в базовой системе координат равна производной по времени от положения конечного звена

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{p}}(t). \quad (5.7-4)$$

Так как инвертирование направляющей матрицы косинусов эквивалентно ее транспонированию, мгновенная угловая скорость системы координат конечного звена вокруг главных осей базовой системы координат может быть получена из уравнения (5.7-2):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \frac{d\mathbf{R}^T}{dt} &= -\frac{d\mathbf{R}}{dt} \mathbf{R}^T = - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -S\beta\dot{\alpha} + \dot{\gamma} & -S\gamma C\beta\dot{\alpha} - C\gamma\dot{\beta} \\ S\beta\dot{\alpha} - \dot{\gamma} & 0 & C\gamma C\beta\dot{\alpha} - S\gamma\dot{\beta} \\ S\gamma C\beta\dot{\alpha} + C\gamma\dot{\beta} & -C\gamma C\beta\dot{\alpha} + S\gamma\dot{\beta} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7-5)$$

Из последнего уравнения можно получить связь между  $[\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]^T$  и  $[\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t), \dot{\gamma}(t)]^T$  путем приравнивания ненулевых элементов в матрицах:

$$\begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\gamma C\beta & -S\gamma & 0 \\ S\gamma C\beta & C\gamma & 0 \\ -S\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.7-6)$$

Отсюда легко определяется обратная связь

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{bmatrix} = \sec\beta \begin{bmatrix} C\gamma & S\gamma & 0 \\ -S\gamma C\beta & C\gamma C\beta & 0 \\ C\gamma S\beta & S\gamma S\beta & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} \quad (5.7-7)$$

или, записывая в матричной форме,

$$\dot{\Phi}(t) \triangleq [S(\Phi)] \Omega(t). \quad (5.7-8)$$

В подвижной системе координат линейную и угловую скорости конечного звена можно получить из скоростей предыдущих сочленений:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} = [N(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}}(t) = [N_1(\mathbf{q}), N_2(\mathbf{q}), \dots, N_6(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (5.7-9)$$

где  $\dot{\mathbf{q}}(t) = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_6)^T$  — вектор скорости сочленений манипулятора, а  $N(\mathbf{q})$  — якобиан размерностью  $6 \times 6$ ,  $i$ -й столбец которого в виде вектора  $N_i(\mathbf{q})$  может быть найден, согласно работе [310], в виде

$$N_i(\mathbf{q}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}, & \text{если } i\text{-е сочленение} \\ & \text{является вращательным,} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{если } i\text{-е сочленение} \\ & \text{является поступательным.} \end{cases} \quad (5.7-10)$$

Знак  $\times$  означает результат пересечения векторов,  $\mathbf{p}_{i-1}$  — положение начала координат  $(i-1)$  системы координат по отношению к базовой системе координат,  $\mathbf{z}_{i-1}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси движения  $i$ -го сочленения, а  $\mathbf{p}$  — положение конечного звена в базовой системе координат.

Если инвертированный якобиан существует от  $\mathbf{q}(t)$ , то скорость сочленения  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  манипулятора может быть вычислена из скорости конечного звена при использовании уравнения (5.7-9):

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = N^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix}. \quad (5.7-11)$$

Если заданы желаемые линейная и угловая скорости конечного звена, это уравнение позволяет вычислить скорости в сочленениях и определить режимы работы двигателей в сочленениях для того, чтобы обеспечить установившееся движение конечного звена в заданном направлении в декартовой системе координат.

Ускорение конечного звена может быть получено путем определения производной по времени от вектора скорости в уравнении (5.7-9):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \dot{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q}(t) + N(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}(t), \quad (5.7-12)$$

где  $\ddot{\mathbf{q}}(t) = [\ddot{q}_1(t), \dots, \ddot{q}_6(t)]^T$  — вектор ускорения сочленений манипулятора. Подставляя  $\mathbf{q}(t)$  из уравнения (5.7-11) в уравнение (5.7-12), получим

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \dot{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) N^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + N(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}(t). \quad (5.7-13)$$

Ускорения в сочленениях  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  могут быть вычислены из скоростей и ускорений конечного звена следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = N^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} - N^{-1}(\mathbf{q}) \dot{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) N^{-1}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix}. \quad (5.7-14)$$

Полученные кинематические связи между координатами, связанными с сочленениями, и декартовыми координатами будут использованы в разд. 5.7.1 для различных методов независимого программного управления движением и при выводе уравнений движения конечного звена манипулятора в декартовых координатах.

### 5.7.1. Независимое программное управление движением по скорости

При независимом программном управлении движением по скорости работа различных двигателей в сочленениях производится независимо и одновременно с различными скоростями, изменяющимися во времени для того, чтобы обеспечить установившееся движение конечного звена манипулятора вдоль любой оси неподвижной системы координат. Математические выражения, связывающие неподвижные координаты, такие, как подъем  $p_x$ , смещение  $p_y$ , выдвижение  $p_z$ , поворот  $\alpha$ , наклон  $\beta$  и вращение  $\gamma$  с угловыми координатами шестизвенного манипулятора, являются заведомо нелинейными и могут быть запи-

саны с помощью нелинейной вектор-функции в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{q}(t)], \quad (5.7-15)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  — вектор-функция размерностью  $6 \times 1$ , а

$$\mathbf{x}(t) \text{ (декартовы координаты)} = (p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$\text{и } \mathbf{q}(t) \text{ (обобщенные координаты)} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T.$$

Взаимосвязь между линейной и угловой скоростями конечного звена и скоростями сочленений шестизвального манипулятора определена уравнением (5.7-9).

Для более общего рассмотрения предположим, что манипулятор имеет  $m$  степеней свободы, а интересующая нас декартова система координат имеет размерность  $n$ . Тогда углы в сочленениях и декартовы координаты будут связаны нелинейной функцией согласно уравнению (5.7-15).

Дифференцируя уравнение (5.7-15) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (5.7-16)$$

где  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  — якобиан от  $\mathbf{q}(t)$ , т. е.

$$N_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (5.7-17)$$

Из уравнения (5.7-16) видно, что при осуществлении управления по скорости связь является линейной. Когда  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{q}(t)$  имеют одинаковую размерность, манипулятор не имеет избыточных степеней свободы и якобиан может быть инвертирован в соответствии с несингулярным положением  $\mathbf{q}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{N}^{-1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (5.7-18)$$

Если известна скорость движения вдоль декартовых координат, то из уравнения (5.7-18) легко находится комбинация скоростей двигателей в сочленениях, обеспечивающая желаемое движение конечного звена. Для этого могут быть использованы различные методы вычисления обратного якобиана. Блок-схема программного управления движением по скорости приведена на рис. 5.11. Если  $m > n$ , манипулятор имеет избыточные степени свободы и обратный якобиан не существует. Это сводит задачу к нахождению обобщенного обратного якобиана. В таком случае если ранг  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  равен  $n$ , то  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  определяется путем минимизации критерия ошибки, который формируется присоединением уравнения (5.7-16) с множителем Лагранжа к критерию качества, т. е.

$$C = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} + \lambda^T [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{N}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}], \quad (5.7-19)$$

где  $\lambda$  — вектор множителя Лагранжа, а  $\mathbf{A}$  — симметрическая положительно определенная матрица размерностью  $m \times m$ .

Минимизируя критерий качества  $C$  относительно  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  и  $\lambda$ , имеем

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}^T(\mathbf{q}) \lambda \quad (5.7-20)$$

$$\text{и} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t). \quad (5.7-21)$$

Подставляя  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  из уравнения (5.7-20) в уравнение (5.7-21) и решая его относительно  $\lambda$ , получим

$$\lambda = [\mathbf{N}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}^T(\mathbf{q})]^{-1} \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (5.7-22)$$

Подставляя  $\lambda$  в уравнение (5.7-20), имеем

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}^T(\mathbf{q}) [\mathbf{N}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}^T(\mathbf{q})]^{-1} \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (5.7-23)$$

Если матрица  $\mathbf{A}$  — тождественная, уравнение (5.7-23) сводится к уравнению (5.7-18).

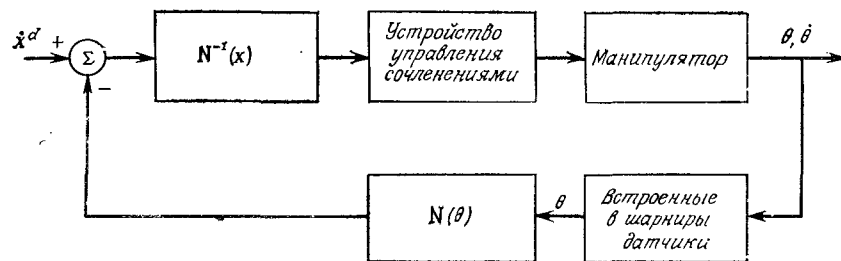


Рис. 5.11. Блок-схема программного управления движением по скорости.

Достаточно часто возникает необходимость управлять движением конечного звена не в неподвижной системе координат, а в системе координат конечного звена (рис. 5.10). В этом случае требуемая скорость движения конечного звена в системе координат конечного звена связана с движением в неподвижной декартовой системе координат следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = {}^0\mathbf{R}_n \dot{\mathbf{h}}(t), \quad (5.7-24)$$

где  ${}^0\mathbf{R}_n$  — матрица размерностью  $n \times 6$ , которая связывает ориентацию системы координат конечного звена относительно неподвижной системы координат. Если задана скорость движения конечного звена  $\dot{\mathbf{h}}(t)$  относительно системы координат конечного звена, то, используя уравнения (5.7-23), (5.7-24), скорость движения сочленения может быть вычислена по формуле

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}^T(\mathbf{q}) [\mathbf{N}(\mathbf{q}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N}^T(\mathbf{q})]^{-1} {}^0\mathbf{R}_n \dot{\mathbf{h}}(t). \quad (5.7-25)$$

В уравнениях (5.7-23) и (5.7-25) угловое положение  $\mathbf{q}(t)$  зависит от времени  $t$ , поэтому необходимо оценивать  $\mathbf{N}^{-1}(\mathbf{q})$  на каждом отрезке дискретного времени при вычислении  $\mathbf{q}(t)$ . При использовании этого метода управления требуется дополнительное вычисление обратного якобиана на каждом отрезке дискретного времени и решение сингулярной задачи, связанной с инвертированием матрицы.

### 5.7.2. Независимое программное управление движением по ускорению

Независимое программное управление движением по ускорению [186] расширяет возможности управления движением по скорости, включая управление ускорением. Оно является альтернативой управлению по положению, при котором непосредственно учитывается положение или ориентация конечного звена манипулятора. Всякое управление по обратной связи производится относительно конечного звена, следовательно, предполагается, что желаемые ускорения при заданном движении конечного звена заранее определяются пользователем.

Действительное и желаемое положения и ориентация конечного звена манипулятора могут быть представлены следующими однородными матрицами преобразования размерностью  $4 \times 4$ :

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}(t) & \mathbf{s}(t) & \mathbf{a}(t) & \mathbf{p}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{H}^d(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^d(t) & \mathbf{s}^d(t) & \mathbf{a}^d(t) & \mathbf{p}^d(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.7-26)$$

где  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{a}$  — единичные векторы, направленные соответственно вдоль главных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  системы координат конечного звена, а  $\mathbf{p}(t)$  — вектор положения конечного звена относительно базовой системы координат. Ориентация подматрицы  $[\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a}]$  определяется с помощью углов Эйлера, описывающих вращение  $(\alpha, \beta, \gamma)$  относительно базовой системы координат в соответствии с уравнением (5.7-2).

Ошибка позиционирования конечного звена определяется как разность между желаемым и действительным положением конечного звена и может быть записана в виде

$$\mathbf{e}_p(t) = \mathbf{p}^d(t) - \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_x^d(t) - p_x(t) \\ p_y^d(t) - p_y(t) \\ p_z^d(t) - p_z(t) \end{bmatrix}. \quad (5.7-27)$$

Аналогичным образом ошибка ориентации определяется как расхождение между желаемой и действительной ориентацией

осей конечного звена и может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{e}_o(t) = 1/2 [\mathbf{n}(t) \times \mathbf{n}^d + \mathbf{s}(t) \times \mathbf{s}^d + \mathbf{a}(t) \times \mathbf{a}^d]. \quad (5.7-28)$$

Следовательно, управление манипулятором основывается на сведении указанных ошибок конечного звена к нулю.

Для шестизвеного манипулятора можно совместить линейные скорости  $\mathbf{v}(t)$  и угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  конечного звена в шестимерном векторе  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (5.7-29)$$

где  $\mathbf{N}(\mathbf{q})$  — матрица размерностью  $6 \times 6$ , определенная уравнением (5.7-10). Уравнение (5.7-29) является основным для независимого программного управления движением по скорости, где скорости в сочленениях находятся из скоростей конечного звена. Аналогично могут быть определены ускорения в сочленениях из ускорения конечного звена  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ . Производная по времени от  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  представляет собой ускорение конечного звена

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{N}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{N}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}(t). \quad (5.7-30)$$

Управление заданным движением по ускорению с использованием обратной связи основано на сведении ошибок позиционирования и ориентации конечного звена к нулю. Если траектория движения манипулятора задана в декартовых координатах, то известны желаемые положения  $\mathbf{p}^d(t)$ , скорость  $\mathbf{v}^d(t)$  и ускорение  $\dot{\mathbf{v}}^d(t)$  относительно базовой системы координат. Для уменьшения ошибки позиционирования каждый двигатель в сочленениях манипулятора должен развить необходимые моменты и усилия. По существу это приводит к возникновению линейного ускорения конечного звена  $\mathbf{v}(t)$ , которое удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}^d(t) + k_1 [\mathbf{v}^d(t) - \mathbf{v}(t)] + k_2 [\mathbf{p}^d(t) - \mathbf{p}(t)], \quad (5.7-31)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — скалярные константы. Уравнение (5.7-31) может быть записано в виде

$$\ddot{\mathbf{e}}_p(t) + k_1 \dot{\mathbf{e}}_p(t) + k_2 \mathbf{e}_p(t) = 0, \quad (5.7-32)$$

где  $\mathbf{e}_p(t) = \mathbf{p}^d(t) - \mathbf{p}(t)$ . Входные моменты и силы должны выбираться таким образом, чтобы гарантировать асимптотическую сходимость к нулю ошибки позиционирования конечного звена. Для этого необходимо выбрать  $k_1$  и  $k_2$  так, чтобы характеристические корни уравнения (5.7-32) имели отрицательные действительные части.

Аналогично, чтобы уменьшить ошибку ориентации конечного звена, требуется обеспечить входные моменты и силы, прикладываемые к манипулятору таким образом, чтобы угловое ускорение конечного звена удовлетворяло выражению

$$\dot{\omega}(t) = \dot{\omega}^d(t) + k_1[\omega^d(t) - \omega(t)] + k_2 e_0. \quad (5.7-33)$$

Сгруппируем  $v^d$  и  $\omega^d$  в шестимерный вектор, а ошибки позиционирования и ориентации в вектор ошибки

$$\dot{x}^d(t) = \begin{bmatrix} v^d(t) \\ \omega^d(t) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad e(t) = \begin{bmatrix} e_p(t) \\ e_0(t) \end{bmatrix}. \quad (5.7-34)$$

Из уравнений (5.7-31) и (5.7-33) имеем

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}^d(t) + k_1[\dot{x}^d(t) - \dot{x}(t)] + k_2 e(t). \quad (5.7-35)$$

Подставляя уравнения (5.7-29) и (5.7-30) в уравнение (5.7-35) и решая его относительно  $q(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= N^{-1}(q) [\ddot{x}^d(t) + k_1(\dot{x}^d(t) - \dot{x}(t)) + k_2 e(t) - \dot{N}(q, \dot{q}) \dot{q}(t)] = \\ &= -k_1 \dot{q}(t) + N^{-1}(q) [\ddot{x}^d(t) + k_1 \dot{x}^d(t) + k_2 e(t) - \dot{N}(q, \dot{q}) \dot{q}(t)]. \end{aligned} \quad (5.7-36)$$

Уравнение (5.7-36) является основой для управления заданным движением манипулятора по ускорению с помощью обратной связи. Для вычисления управляющих моментов и сил в двигателе каждого сочленения манипулятора используются рекурсивные уравнения движения Ньютона — Эйлера. Положение  $q(t)$  и скорость сочленения манипулятора  $\dot{q}(t)$  измеряются потенциометрами или оптическими кодирующими устройствами. Величины  $v$ ,  $\omega$ ,  $N$ ,  $N^{-1}$ ,  $\dot{N}$  и  $H(t)$  могут быть найдены из рассмотренных выше уравнений. Эти величины, определяемые заданной траекторией вместе с желаемыми положением  $p^d(t)$ , скоростью  $v^d(t)$  и ускорением  $\dot{v}^d(t)$ , используются при вычислении ускорения в сочленении в соответствии с уравнением (5.7-36). Управляющие моменты и силы в сочленениях могут быть рекурсивно получены из уравнений движения Ньютона — Эйлера. Этот метод управления также требует большого объема вычислений и характеризуется особенностями, связанными с использованием якобиана, а также необходимостью иметь информацию об ускорении для формирования траектории движения конечного звена манипулятора.

### 5.7.3. Независимое программное управление движением по силе

Основным назначением независимого программного управления движением по силе является определение управляющих моментов двигателей сочленений для осуществления позицион-

ного управления в декартовых координатах манипулятором робота. Преимущество этого метода заключается в том, что он не использует сложные динамические уравнения движения манипулятора и имеет возможность компенсировать упругую податливость конструкции, силы тяжести и трение. Этот метод так же, как и описанные выше методы, является методом управления конечным звеном манипулятора. Он основан на связи между вектором силы  $F$ , получаемым от датчика усилия в захватном устройстве манипулятора, и моментами, развиваемыми двигателями сочленений. Данный метод управления состоит из управления положением в декартовых координатах и управления по силе. При управлении положением вычисляются

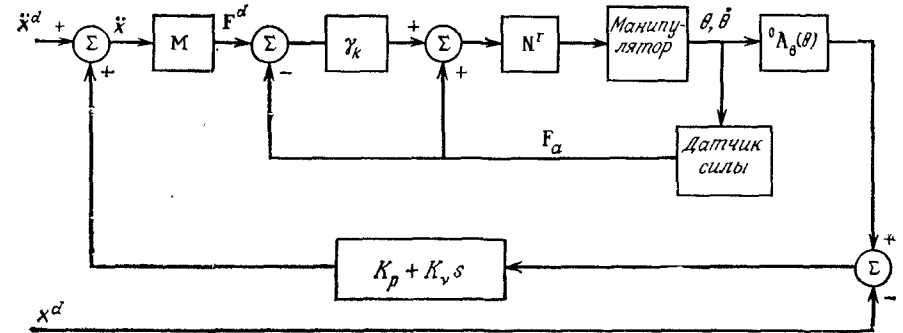


Рис. 5.12. Блок-схема программного управления по силе.

требуемые силы и моменты, которые должны быть приложены к конечному звену для организации желаемой траектории движения в декартовых координатах. Управление по силе определяет необходимые моменты в двигателях каждого сочленения таким образом чтобы конечное звено могло поддерживать силы и моменты, заданные управлением по положению. Блок-схема такого управления приведена на рис. 5.12.

Кратко рассмотрим математический аппарат, используемый в данном методе управления. Более подробное его изложение можно найти в работе [316]. Основная идея метода базируется на связи между заданным вектором силы  $F = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)^T$  и моментами в сочленениях  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$ , которые прикладываются к двигателям в каждом сочленении для уравновешивания сил, действующих на конечное звено. Здесь  $(F_x, F_y, F_z)^T$  и  $(M_x, M_y, M_z)^T$  — соответственно силы в декартовой системе координат и моменты в системе координат конечного звена. Связь между этими величинами записывается в виде

$$\tau(t) = N^T(q) F(t), \quad (5.7-37)$$

где  $N$  — якобиан, определяемый уравнением (5.7-10).

Так как целью такого управления является формирование траектории конечного звена в декартовых координатах, то соответствующие временные траектории положения должны быть заданы в виде функций от матрицы преобразования манипулятора  ${}^0\mathbf{A}_6(t)$ , скорости  $(v_x, v_y, v_z)^T$  и угловой скорости  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  относительно системы координат конечного звена. Другими словами, заданная зависящая от времени матрица преобразования  ${}^0\mathbf{A}_6(t + \Delta t)$  может быть представлена в виде

$${}^0\mathbf{A}_6(t + \Delta t) = {}^0\mathbf{A}_6(t) \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) & v_x(t) \\ \omega_z(t) & 1 & -\omega_x(t) & v_y(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 1 & v_z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta t. \quad (5.7-38)$$

Желаемая скорость  $\dot{\mathbf{x}}^d(t) = (v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$  в декартовых координатах определяется из следующего уравнения:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) & v_x(t) \\ \omega_z(t) & 1 & -\omega_x(t) & v_y(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 1 & v_z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} [({}^0\mathbf{A}_6)^{-1}(t) {}^0\mathbf{A}_6(t + \Delta t)]. \quad (5.7-39)$$

Ошибка по скорости  $\dot{\mathbf{x}}^d - \dot{\mathbf{x}}$  в декартовых координатах также определяется из приведенного уравнения. Ошибка по скорости  $\dot{\mathbf{x}}^d - \dot{\mathbf{x}}$ , используемая в уравнении (5.7-31), отличается от указанной ошибки по скорости, так как в уравнении ошибки, приведенном выше, используется метод с применением однородной матрицы преобразования. В уравнении (5.7-31) ошибка по скорости была получена простым дифференцированием  $\mathbf{p}^d(t) - \mathbf{p}(t)$ .

Аналогично можно получить желаемое ускорение  $\ddot{\mathbf{x}}^d(t)$  в декартовых координатах:

$$\ddot{\mathbf{x}}^d(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}^d(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{x}}^d(t)}{\Delta t}. \quad (5.7-40)$$

Если отсутствуют ошибки по положению и скорости конечного звена, при использовании пропорционально-дифференциального метода управления желательно как можно ближе совместить действительное и желаемое значения ускорений  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  в декартовых координатах. Это достигается установкой действительного значения ускорения в декартовых координатах согласно следующему выражению:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{\mathbf{x}}^d(t) + K_v [\dot{\mathbf{x}}^d(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] + K_p [\mathbf{x}^d(t) - \mathbf{x}(t)], \quad (5.7-41)$$

или  $\ddot{\mathbf{x}}_e(t) + K_v \dot{\mathbf{x}}_e(t) + K_p \mathbf{x}_e(t) = 0. \quad (5.7-42)$

При выборе величин  $K_v$  и  $K_p$  такими, при которых характеристические корни уравнения (5.7-42) имеют отрицательные действительные части,  $\mathbf{x}(t)$  будет сходиться к  $\mathbf{x}^d(t)$  асимптотически.

В данном методе управления желаемые силы и моменты, компенсирующие ошибки позиционирования, могут быть получены с использованием второго закона Ньютона:

$$\mathbf{F}^d(t) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t), \quad (5.7-43)$$

где  $\mathbf{M}$  — матрица массы с диагональными элементами в виде общей массы нагрузки  $m$  и моментов инерции  $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  относительно основных осей нагрузки. Используя уравнение (5.7-37), заданные силы  $\mathbf{F}^d$  в декартовых координатах могут быть переведены в моменты в сочленениях:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{N}^T(\mathbf{q}) \mathbf{F}^d = \mathbf{N}^T(\mathbf{q}) \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t). \quad (5.7-44)$$

Обычно данный метод целесообразно использовать только в том случае, когда нагрузка незначительна по сравнению с массой манипулятора. Если нагрузка сравнима с массой манипулятора, желаемая точность позиционирования конечного звена обычно не достигается. Это происходит оттого, что некоторые моменты в сочленениях оказываются недостаточными для развития необходимых ускорений звеньев. Чтобы компенсировать эти эффекты, используется комбинированное управление по силе и положению.

Метод управления по силе основывается на методе стохастической аппроксимации Роббинса — Монро и служит для определения действительной силы  $\mathbf{F}_a$  в декартовых координатах, такой, что необходимая сила  $\mathbf{F}_0$ , измеренная датчиком силы в захватном устройстве конечного звена манипулятора, сводится к желаемой силе, полученной рассмотренным выше методом управления по положению. Если ошибка между измеренным вектором силы  $\mathbf{F}_0$  и желаемой силой в декартовых координатах больше, чем заданный пользователем порог  $\Delta \mathbf{F}(k) = \mathbf{F}^d(k) - \mathbf{F}_0(k)$ , действительная сила в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$\mathbf{F}_a(k+1) = \mathbf{F}_a(k) + \gamma_k \Delta \mathbf{F}(k), \quad (5.7-45)$$

где  $\gamma_k = 1/(k+1)$  для  $k = 0, 1, \dots, N$ . Теоретически величина  $N$  должна быть большой. Однако на практике величина  $N$  может быть выбрана исходя из условия сходимости сил. По результатам численного моделирования, приведенным в работе [316], величина  $N = 1$  или  $N = 2$  дает достаточно хорошую сходимость вектора сил.

Таким образом, описанный метод управления по силе имеет преимущества: он учитывает различные изменения нагрузки и его можно использовать для манипуляторов с любым числом степеней свободы без увеличения сложности вычислений.

## 5.8. АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Большинство методов, рассмотренных в предыдущих разделах, предназначено для управления конечным звеном манипулятора или сочленениями, и в них уделено внимание компенсации нелинейностей от сил взаимодействия между различными сочленениями. Эти управляющие алгоритмы могут быть неадекватными, потому что требуют наличия точной модели динамики манипулятора и не учитывают изменения нагрузки в процессе выполнения манипулятором работы. Такие изменения в объекте управления часто оказываются достаточно значительными и снижают эффективность управления по обратной связи. В результате ухудшается динамика и демпфирование системы, что ограничивает точность и скорость позиционирования конечного звена. Значительное улучшение точности формирования желаемой траектории во времени для широкого диапазона движений манипулятора и для различных нагрузок достигается при использовании адаптивных методов управления.

### 5.8.1. Адаптивное управление по заданной модели

Среди различных методов адаптивного управления наиболее широко используемым и относительно легко реализуемым является адаптивное управление по заданной модели. Идея этого метода основана на выборе соответствующей заданной модели и алгоритма адаптации, по которым изменяются коэффициенты передач обратных связей на двигатели в реальной системе. Алгоритм адаптации проводится на основе информации об ошибках между выходами заданной модели и выходами реальной системы. Общая блок-схема адаптивного управления системой по заданной модели приведена на рис. 5.13.

Простое адаптивное управление по заданной модели для механических манипуляторов было предложено в работе [64]. При анализе нагрузка принималась в рассмотрение в сочетании с конечным звеном и предполагалось, что размеры конечного звена малы по сравнению с длиной других звеньев. Таким образом, выбранная заданная модель обеспечивает эффективную и гибкую работу замкнутой управляемой системы по формированию желаемой траектории. В качестве заданной модели для каждой степени свободы манипулятора робота выбирается линейное дифференциальное уравнение второго порядка, не зависящее от времени. Манипулятор управляется путем настройки

коэффициентов передачи обратной связи по положению и по скорости при отслеживании модели таким образом, чтобы его рабочие характеристики при замкнутом управлении совпадали с желаемыми рабочими характеристиками заданной модели. В результате такая схема адаптивного управления требует небольшого объема вычислений, которые могут выполняться с помощью недорогих микропроцессоров. Этот алгоритм адаптивного управления не требует ни сложных математических моделей динамической системы, ни предварительного знания внеш-

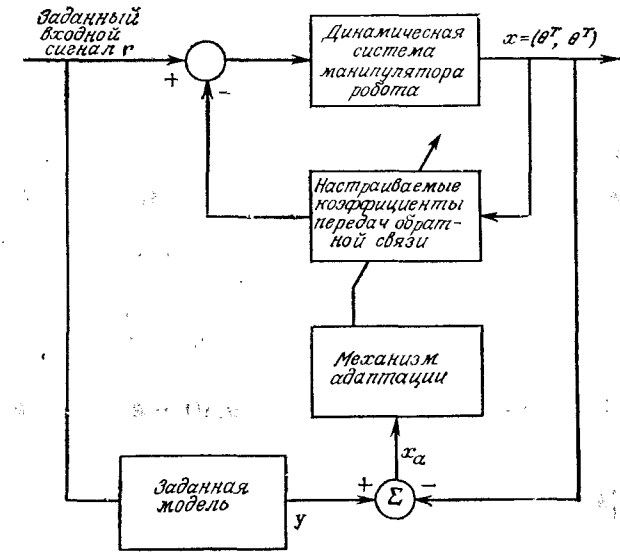


Рис. 5.13. Общая блок-схема адаптивного управления системой по заданной модели.

них воздействий, таких, как величина нагрузки и др. Адаптивная схема, построенная по заданной модели, стабильно функционирует в широком диапазоне движений и нагрузок.

После определения вектора  $y(t)$ , описывающего динамику заданной модели, и вектора  $x(t)$ , описывающего динамику манипулятора,  $i$ -е сочленение заданной модели может быть описано следующим образом:

$$a_i \ddot{y}_i(t) + b_i \dot{y}_i(t) + y_i(t) = r_i(t). \quad (5.8-1)$$

Коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  определяются из частоты собственных колебаний  $\omega_{ni}$  и коэффициента демпфирования  $\zeta_i$  линейной системы второго порядка:

$$a_i = \frac{1}{\omega_{ni}^2} \quad \text{и} \quad b_i = \frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}}. \quad (5.8-2)$$

В предположении, что при управлении манипулятором используются коэффициенты передачи обратной связи по положению и по скорости и что членами высоких порядков можно пренебречь, уравнение динамики манипулятора для  $i$ -го сочленения может быть записано в виде

$$\alpha_i(t) \ddot{x}_i(t) + \beta_i(t) \dot{x}_i(t) + x_i(t) = r_i(t), \quad (5.8-3)$$

где  $\alpha_i(t)$  и  $\beta_i(t)$  — медленно изменяющиеся во времени параметры системы.

Настройка коэффициентов обратной связи управляемой системы может быть произведена несколькими путями. Для минимизации квадратичной функции ошибки системы, определяемой различиями между динамикой реальной системы (уравнение (5.8-3)) и динамикой заданной модели (уравнение (5.8-1)), благодаря своей простоте используется метод градиентного спуска

$$J_i(e_i) = 1/2 (k_2^i \ddot{e}_i + k_1^i \dot{e}_i + k_0^i e_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.8-4)$$

где  $e_i = y_i - x_i$  и значения весовых коэффициентов  $k_j^i$  выбираются из условий получения стабильности работы системы.

Используя метод градиентного спуска, настройку параметров системы, минимизирующую ошибку системы, можно описать следующими выражениями:

$$\dot{\alpha}_i(t) = [k_2^i \ddot{e}_i(t) + k_1^i \dot{e}_i(t) + k_0^i e_i(t)] [k_2^i \ddot{u}_i(t) + k_1^i \dot{u}_i(t) + k_0^i u_i(t)], \quad (5.8-5)$$

$$\dot{\beta}_i(t) = [k_2^i \ddot{e}_i(t) + k_1^i \dot{e}_i(t) + k_0^i e_i(t)] [k_2^i \dot{w}_i(t) + k_1^i w_i(t) + k_0^i w_i(t)], \quad (5.8-6)$$

где  $u_i(t)$  и  $w_i(t)$ , а также их производные описываются из решения следующих дифференциальных уравнений:

$$a_i \ddot{u}_i(t) + b_i \dot{u}_i(t) + u_i(t) = -\ddot{y}_i(t), \quad (5.8-7)$$

$$a_i \dot{w}_i(t) + b_i w_i(t) + w_i(t) = -\dot{y}_i(t). \quad (5.8-8)$$

Величины  $\ddot{y}_i(t)$  и  $\dot{y}_i(t)$  представляют собой две первые производные по времени из уравнения динамики заданной модели. В замкнутой адаптивной системе решение уравнений заданной модели используется для получения желаемого входа. Таким образом, для получения значений  $u_i(t)$  и  $w_i(t)$ , а также их производных в уравнениях (5.8-5) и (5.8-6) решаются дифференциальные уравнения (5.8-7) и (5.8-8). Наконец, решая дифференциальные уравнения (5.8-5) и (5.8-6), получаем значения  $\alpha_i(t)$  и  $\beta_i(t)$ .

Одним из наиболее важных преимуществ такого метода управления является отсутствие сложной математической модели, однако стабильность замкнутой адаптивной системы при

этом находится на границе устойчивости. Поскольку анализ устойчивости в данном методе затруднителен, в работе [64] была исследована линеаризованная модель адаптивной системы. Однако возможность адаптации устройства управления при больших силах взаимодействия между звеньями манипулятора для рассмотренного метода становится неоднозначной.

### 5.8.2. Адаптивное управление с авторегрессивной моделью

В работе [150] предложено адаптивное самонастраивающееся устройство управления, использующее авторегрессивную модель для установления соответствия между входными и выходными параметрами манипулятора. Алгоритм управления предполагает, что силы взаимодействия между сочленениями

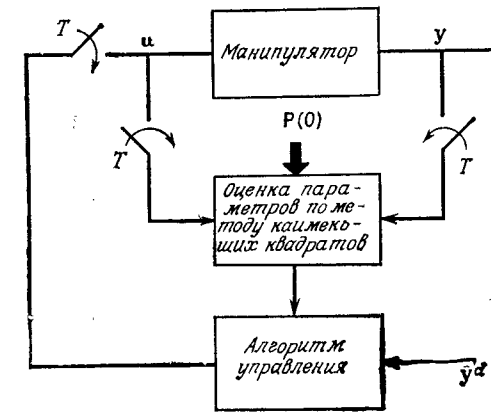


Рис. 5.14. Адаптивное управление с авторегрессивной моделью.

ничтожно малы. Блок-схема системы управления приведена на рис. 5.14. Обозначим входной момент на  $i$ -м сочленении через  $u_i$ , а выходное угловое положение манипулятора — через  $y_i$ . Пара входного и выходного параметров  $(u_i, y_i)$  может быть описана авторегрессивной моделью, которая приводит эту пару как можно в более близкое соответствие:

$$y_i(k) = \sum_{m=1}^n [a_i^m y_i(k-m) + b_i^m u_i(k-m)] + a_i^0 + e_i(k), \quad (5.8-9)$$

где  $a_i^0$  — постоянная силы,  $e_i(k)$  — ошибка моделирования, которая по предположению описывается белым шумом с гауссовским распределением и не зависит от  $u_i$  и  $y_i(k-m)$ ,  $m \geq 1$ . Параметры  $a_i^m$  и  $b_i^m$  определяются таким образом, чтобы полу-



чить наилучшее совпадение наименьших квадратов измеренной пары параметров входа и выхода. Эти параметры могут быть получены путем минимизации следующего критерия:

$$E_N^i(\alpha_i) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N e_i^2(k), \quad (5.8-10)$$

где  $N$  — число измерений. Пусть  $\alpha_i$  является  $i$ -м параметрическим вектором

$$\alpha_i = (a_i^0, a_i^1, \dots, a_i^n, b_i^0, b_i^1, \dots, b_i^n)^T, \quad (5.8-11)$$

а  $\psi_i(k-1)$  — вектор пары входного и выходного воздействия

$$\psi_i(k-1) = [1, y_i(k-1), \dots, y_i(k-n), u_i(k-1), \dots, u_i(k-n)]^T. \quad (5.8-12)$$

Тогда рекурсивная оценка по наименьшим квадратам  $\alpha_i$  определяется выражением

$$\hat{\alpha}_i(N) = \hat{\alpha}_i(N-1) + P_i(N) \psi_i(N-1) [y_i(N) - \hat{\alpha}_i^T(N-1) \psi_i(N-1)], \quad (5.8-13)$$

в котором

$$P_i(N) = \frac{1}{\mu_i} \left[ \frac{P_i(N-1) \psi_i(N-1) \psi_i^T(N-1) P_i(N-1)}{\mu_i + \psi_i^T(N-1) P_i(N-1) \psi_i(N-1)} \right], \quad (5.8-14)$$

где  $0 < \mu_i \leq 1$  — коэффициент «запоминания», обеспечивающий экспоненциальное убывание предыдущих значений параметров во времени в алгоритме оценивания и возможность медленного изменения параметров,  $P_i$  — симметрическая матрица размерностью  $(2n+1) \times (2n+1)$ , а  $\hat{\alpha}_i$  над  $\alpha_i$  обозначает оценку.

Используя приведенные уравнения для вычисления оценок авторегрессивной модели, эту модель можно представить в виде

$$y_i(k) = \hat{\alpha}_i^T \psi_i(k-1) + e_i(k). \quad (5.8-15)$$

Рабочий критерий для  $i$ -го сочленения при определении опорных точек траектории имеет вид

$$J_i^k(\mathbf{u}) = E \{ [y_i(k+2) - y_i^d(k+2)]^2 + \gamma_i u_i^2(k+1) | \psi_i(k) \}, \quad (5.8-16)$$

где  $E[\cdot]$  — вероятность выполнения процесса при наличии  $\psi_i(k)$ , а  $\gamma_i$  — неотрицательный весовой коэффициент, задаваемый пользователем.

Оптимальное управление, минимизирующее приведенный рабочий критерий, имеет вид

$$u_i(k+1) = \frac{-\hat{b}_i^1(k)}{[\hat{b}_i^1(k)]^2 + \gamma_i} \left\{ \hat{a}_i^0(k) + \hat{a}_i^1(k) [\hat{\alpha}_i^T \psi_i(k)] + \sum_{m=2}^n \hat{a}_i^m(k) y_i(k+2-m) + \sum_{m=2}^n \hat{b}_i^m(k) u_i(k+2-m) - y_i^d(k+2) \right\}, \quad (5.8-17)$$

где  $\hat{a}_i^m$ ,  $\hat{b}_i^m$  и  $\hat{\alpha}_i^m$  — оценка параметров из уравнений (5.8-13) и (5.8-14).

Таким образом, рассмотренное адаптивное управление использует авторегрессивную модель (уравнение (5.8-9)) для приведения в соответствие входных и выходных параметров манипулятора. Для выработки оптимального управления (уравнение (5.8-17)) сервомеханизмом манипулятора используется оценка параметров, которая производится с помощью рекурсивной схемы идентификации по наименьшим квадратам (уравнения (5.8-13) и (5.8-14)).

### 5.8.3. Адаптивное управление по возмущению

В работах [159, 160] на основе теории возмущений был предложен метод адаптивного управления, который обеспечивает формирование траектории, максимально приближенной к заданной в каждый момент времени для широкого диапазона движений и нагрузок. Адаптивное управление по возмущению отличается от предыдущих методов адаптивного управления тем, что в нем учитываются все силы взаимодействия между различными сочленениями. Рассматриваемое в этом разделе оптимальное управление базируется на линейризованных уравнениях движения в окрестности номинальной траектории. Номинальная траектория определяется интерполированной траекторией сочленения, когда угловое положение, скорость и ускорение известны в каждый дискретный момент времени. Нелинейные динамические уравнения высоких порядков линейризуются относительно заданной траектории манипулятора с целью получения линейризованной возмущенной системы. Управляемая система характеризуется наличием прямой и обратной связей, которые могут быть рассчитаны отдельно и одновременно. Прямая связь формирует номинальные моменты для компенсации всех сил взаимодействия между различными сочленениями при движении вдоль заданной траектории с помощью уравнений движения Ньютона — Эйлера, используемых в обратной задаче динамики манипулятора. Обратная связь формирует моменты по возмущениям, которые уменьшают ошибки манипулятора по

положению и по скорости до нуля вдоль заданной траектории. Рекурсивная схема идентификации по наименьшим квадратам используется для эффективного определения параметров системы в реальном времени из уравнений возмущений. При управлении линеаризованной возмущенной системой вдоль заданной траектории используется одношаговый оптимальный закон управления. Для получения необходимого управляющего воздействия параметры и коэффициенты передачи обратной связи пересчитываются и настраиваются в каждый дискретный период времени. Таким образом, общий момент, управляющий двигателями сочленений, складывается из номинальных моментов, определяемых из уравнений движения Ньютона — Эйлера, и их моментов по возмущениям, вычисляемых по одношаговому оптимальному закону управления линеаризованной системой. Такой метод адаптивного управления позволяет свести задачу управления манипулятором от номинального управления к управлению линейной системой вдоль заданной траектории.

Адаптивное управление основывается на линеаризованных уравнениях для возмущений относительно заданной траектории. Для построения устройства управления с обратной связью с целью вычисления моментов возмущения в сочленениях, уменьшающих ошибки по положению и по скорости вдоль заданной траектории, необходимо продифференцировать соответствующие линеаризованные уравнения возмущений. Уравнения движения Лагранжа — Эйлера  $n$ -звенного манипулятора могут быть выражены в пространстве состояний в виде уравнений (5.4-4). В такой постановке задача управления формулируется как нахождение закона управления по обратной связи  $u(t) = g[x(t)]$ , такого, что замкнутая система управления  $\dot{x}(t) = f[x(t), g[x(t)]]$  асимптотически устойчива и описывает максимально приближенную к желаемой траекторию в широком диапазоне нагрузок в каждый момент времени.

Предположим, что заданное состояние  $x_n(t)$  системы (уравнение (5.4-4)) определено заданной траекторией, а соответствующие заданные моменты  $u_n(t)$  получены из уравнений движения Ньютона — Эйлера. Тогда  $x_n(t)$  и  $u_n(t)$  удовлетворяют уравнению (5.4-4):

$$\dot{x}_n(t) = f[x_n(t), u_n(t)]. \quad (5.8-18)$$

Используя разложение в ряд Тейлора в уравнении (5.4-4) относительно заданной траектории и вычитая из него уравнение (5.8-18), а также пренебрегая членами высоких порядков, получим соответствующую линеаризованную модель возмущений для рассматриваемого типа управления:

$$\delta \dot{x}(t) = \nabla_x f|_n \delta x(t) + \nabla_u f|_n \delta u(t) = A(t) \delta x(t) + B(t) \delta u(t), \quad (5.8-19)$$

где  $\nabla_x f|_n$  и  $\nabla_u f|_n$  — якобианы в функции от  $f[x(t), u(t)]$ , определяемые соответственно  $x_n(t)$  и  $u_n(t)$ ,  $\delta x(t) = x(t) - x_n(t)$ , а  $\delta u(t) = u(t) - u_n(t)$ .

Параметры системы  $A(t)$  и  $B(t)$  в уравнении (5.8-19) зависят от текущего положения и скорости манипулятора при движении вдоль заданной траектории и, следовательно, медленно меняются во времени. Из-за сложности уравнений движения манипулятора точное определение элементов  $A(t)$  и  $B(t)$  чрезвычайно затруднительно. Однако построение закона управления с обратной связью для уравнений возмущения требует, чтобы параметры системы в уравнении (5.8-19) были известны в каждый момент времени. Таким образом, для определения неизвестных элементов  $A(t)$  и  $B(t)$  может быть использован метод параметрической идентификации.

В данной постановке задача управления манипулятором сводится к определению  $\delta u(t)$ , которое устремляет  $\delta x(t)$  к нулю вдоль всей заданной траектории в каждый момент времени. Следовательно, вся управляемая система характеризуется параметрами как прямой, так и обратной связей. После задания опорных точек траектории  $q^d(t)$ ,  $\dot{q}^d(t)$  и  $\ddot{q}^d(t)$  в прямой связи формируются соответствующие номинальные моменты  $u_n(t)$  из уравнений движения Ньютона — Эйлера. В обратной связи формируются соответствующие моменты по возмущениям  $\delta u(t)$ , которые компенсируют малые отклонения от заданной траектории. Вычисление моментов, компенсирующих возмущения, производится с помощью одношагового оптимального закона управления. Такая постановка задачи имеет два главных преимущества. Первое преимущество заключается в сведении нелинейной задачи управления к линейному управлению вдоль заданной траектории, а второе — в том, что определение номинальных и компенсирующих моментов может быть произведено отдельно и одновременно. Благодаря наличию такой параллельной структуры вычислений метод адаптивного управления легко реализуется на современных недорогих микропроцессорах. Блок-схема рассмотренного метода управления приведена на рис. 5.15.

В случае использования цифровых машин уравнение (5.8-19) необходимо дискретизировать для получения соответствующих дискретных уравнений при определении требуемых параметров:

$$x[(k+1)T] = F(kT)x(kT) + G(kT)u(kT), \quad k=0, 1, \dots, \quad (5.8-20)$$

где  $T$  — период дискретизации и  $u(kT)$  —  $n$ -мерный кусочно-постоянный входной вектор управления  $u(t)$  на интервале времени между двумя любыми последовательными моментами дискретизации  $kT \leq t < (k+1)T$ , а  $x(kT)$  —  $2n$ -мерный возмущен-

ный вектор состояния, который определяется выражением

$$x(kT) = \Gamma(kT, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{kT} \Gamma(kT, t) \mathbf{B}(t) u(t) dt. \quad (5.8-21)$$

Здесь  $\Gamma(kT, t_0)$  — переходная матрица состояния системы, а  $\mathbf{F}(kT)$  и  $\mathbf{G}(kT)$  — соответственно матрицы размерностью  $2n \times 2n$  и  $2n \times n$ , которые определяются следующим образом:

$$\mathbf{F}(kT) = \Gamma[(k+1)T, kT] \quad (5.8-22)$$

и 
$$\mathbf{G}(kT) u(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Gamma[(k+1)T, t] \mathbf{B}(t) u(t) dt. \quad (5.8-23)$$

В этой модели должны быть определены все  $6n^2$  параметров в матрицах  $\mathbf{F}(kT)$  и  $\mathbf{G}(kT)$ . Для простоты и ясности исключают период дискретизации  $T$  из последнего уравнения.

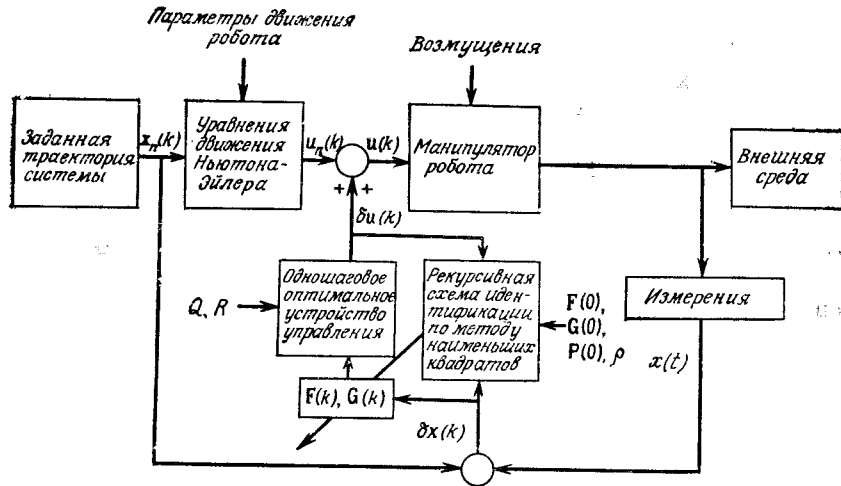


Рис. 5.15. Адаптивное управление по возмущениям.

Задача определения параметров может быть решена с помощью различных алгоритмов, таких, как методы наименьших квадратов, максимума, вариационных методов и методов стохастической аппроксимации. Для определения параметров системы в матрицах  $\mathbf{F}(k)$  и  $\mathbf{G}(k)$  целесообразно использовать рекурсивную схему определения параметров по наименьшим квадратам в реальном времени благодаря простоте ее реализации. В данной схеме определения параметров делаются следующие предположения: 1) параметры системы медленно меняются, но при этом скорость их изменения меньше, чем скорость адапта-

ции; 2) погрешности измерений пренебрежимо малы; 3) переменные состояния  $x(k)$  в уравнении (5.8-20) поддаются измерению.

Для того чтобы применить рекурсивный алгоритм идентификации по наименьшим квадратам к уравнению (5.8-20), необходимо трансформировать систему уравнений к удобному для вычисления виду. Записывая  $i$ -ю строку неизвестных параметров системы через  $k$ -й момент времени в виде  $3n$ -мерного вектора, получим

$$\theta_i^T(k) = [f_{i1}(k), \dots, f_{ip}(k), g_{i1}(k), \dots, g_{in}(k)], \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (5.8-24)$$

или в матричной форме

$$\Theta(k) = \begin{bmatrix} f_{11}(k) & \dots & f_{p1}(k) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_{1p}(k) & \dots & f_{pp}(k) \\ g_{11}(k) & \dots & g_{p1}(k) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{1n}(k) & \dots & g_{pn}(k) \end{bmatrix} = [\theta_1(k), \theta_2(k), \dots, \theta_p(k)], \quad (5.8-25)$$

где  $p = 2n$ . Аналогично определяем выходы и входы возмущенной системы по уравнению (5.8-20) в  $k$ -й момент времени  $3n$ -мерным вектором:

$$z^T(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_p(k), u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)], \quad (5.8-26)$$

а состояние в  $k$ -й момент времени —  $2n$ -мерным вектором:

$$x^T(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_p(k)]. \quad (5.8-27)$$

В результате система, соответствующая уравнению (5.8-20), может быть записана в виде

$$x_i(k+1) = z^T(k) \theta_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5.8-28)$$

В такой формулировке задачи требуется определить параметры в каждом столбце  $\Theta_k$ , основываясь на измерениях вектора  $z(k)$ . Для того чтобы проверить точность алгоритма оценки по методу наименьших квадратов, при расчете учитывают ошибку моделирования и шум в уравнении (5.8-20) в виде  $2n$ -мерного вектора ошибки  $e(k)$ , часто называемого разностным вектором:

$$e_i(k) = x_i(k+1) - z^T(k) \hat{\theta}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5.8-29)$$

При оценке параметров по методу наименьших квадратов предполагается, что неизвестные параметры являются постоянными

величинами, а решение основывается на ряде из  $N$  измерений с равными весами, используемом для оценки этих параметров. К сожалению, данный алгоритм не может быть использован для параметров, меняющихся во времени. Кроме того, требуется производить сложное в вычислительном отношении инвертирование матриц. Чтобы уменьшить объем вычислений и проследить изменение параметров  $\theta(k)$  во времени на каждом периоде дискретизации, в схеме последовательного определения параметров по методу наименьших квадратов производится пересчет неизвестных параметров на каждом периоде дискретизации с использованием новых измерений на каждом дискретном интервале, что обеспечивает эффективное решение задачи идентификации. Рекурсивный алгоритм определения параметров по методу наименьших квадратов находится путем минимизации экспоненциального критерия ошибки, в котором учитывается квадрат ошибки последних измерений в виде

$$J_N = \sum_{j=1}^N \rho^{N-j} e_i^2(j), \quad (5.8-30)$$

где вектор ошибки определяется выражением

$$e_i^T(N) = [\sqrt{\rho^{N-1}}e_i(1), \sqrt{\rho^{N-2}}e_i(2), \dots, e_i(N)], \quad (5.8-31)$$

а  $N > 3n$  — число измерений, используемых для оценки параметров  $\theta_i(N)$ . Минимизируя критерий ошибки в уравнении (5.8-30) относительно неизвестных параметров вектора  $\theta_i$  и используя лемму об обращении матриц, после простых алгебраических преобразований получаем рекурсивную схему идентификации по методу наименьших квадратов в реальном времени:

$$\hat{\theta}_i(k+1) = \hat{\theta}_i(k) + \gamma(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{z}(k) [x_i(k+1) - \mathbf{z}^T(k) \hat{\theta}_i(k)], \quad (5.8-32)$$

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}(k) - \gamma(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{z}(k) \mathbf{z}^T(k) \mathbf{P}(k) \quad (5.8-33)$$

и 
$$\gamma(k) = [\mathbf{z}^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{z}(k) + \rho]^{-1}, \quad (5.8-34)$$

где  $0 < \rho < 1$ , знак  $\wedge$  над  $\theta_i$  означает оценку,  $\mathbf{P}(k) = \rho [\mathbf{Z}(k) \mathbf{Z}^T(k)]^{-1}$  — симметрическая положительно определенная матрица размерностью  $3n \times 3n$ . Здесь  $\mathbf{Z}(k) = [\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(k)]$  — матрица измерений до  $k$ -го дискретного момента времени. Если ошибки  $e_i(k)$  распределены аналогично и не зависят от нулевого значения и изменения  $\sigma^2$ , то  $\mathbf{P}(k)$  можно представить в виде ковариантной матрицы при  $\rho$ , равно  $\sigma^2$ .

Из приведенных рекурсивных уравнений видно, что оценка параметров  $\hat{\theta}_i(k+1)$  в  $(k+1)$ -й дискретный период времени равна предыдущей оценке  $\hat{\theta}_i(k)$ , скорректированной на величину, пропорциональную  $[x_i(k+1) - \mathbf{z}^T(k) \hat{\theta}_i(k)]$ . Член  $\mathbf{z}^T(k) \hat{\theta}_i(k)$  представляет собой прогнозируемую величину  $x_i(k+1)$ , осно-

ванную на оценке параметров  $\theta_i(k)$  и векторе измерения  $\mathbf{z}(k)$ . Компоненты вектора  $\gamma(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{z}(k)$  являются весовыми коэффициентами, которые определяют величину коррекции предыдущей оценки для получения новой оценки  $\hat{\theta}_i(k+1)$ . Параметр  $\rho$  — весовой коэффициент, обычно используемый для отслеживания медленно меняющихся параметров путем реализации экспоненциального уменьшения во времени значения измеренных величин. Если  $\rho \ll 1$ , наибольший весовой коэффициент получают значения, полученные на последнем дискретном периоде, и не получают значения, полученные на предыдущем периоде. Если  $\rho \approx 1$ , точность отслеживания медленно меняющихся параметров снижается вследствие погрешности при получении и обработке экспериментальных данных.

Путем подбора весового коэффициента  $\rho$  можно добиться компромисса между способностью к быстрой адаптации и потерей точности определения параметров. В большинстве прикладных задач для отслеживания медленно меняющихся параметров  $\rho$  обычно выбирается в пределах  $0,90 \leq \rho < 1,0$ .

Наконец, рассмотренный алгоритм идентификации начинается с выбора начальных значений  $\mathbf{P}(0)$ :

$$\mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}_{3n}, \quad (5.8-35)$$

где  $\alpha$  — большая положительная скалярная величина, а  $\mathbf{I}_{3n}$  — тождественная матрица размерностью  $3n \times 3n$ . Начальную оценку неизвестных параметров  $\mathbf{F}(k)$  и  $\mathbf{G}(k)$  можно аппроксимировать следующими уравнениями:

$$\mathbf{F}(0) \approx \mathbf{I}_{2n} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\} T + \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\}^2 \frac{T^2}{2}, \quad (5.8-36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(0) \approx & \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\} T + \\ & + \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\} \times \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\} T^2 + \\ & + \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\}^2 \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} [\mathbf{x}_n(0), \mathbf{u}_n(0)] \right\} \frac{T^3}{2}. \quad (5.8-37) \end{aligned}$$

где  $T$  — период дискретизации.

Для получения требуемых корректирующих моментов, уменьшающих ошибку манипулятора по положению и скорости вдоль номинальной траектории, соответствующие законы управления могут быть построены после определения параметров  $\mathbf{F}(k)$  и  $\mathbf{G}(k)$ . Это можно сделать путем нахождения оптимального управления  $\mathbf{u}^*(k)$ , минимизирующего рабочий критерий и удовлетворяющего требованиям уравнения (5.8-20):

$$J(k) = 1/2 [\mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)], \quad (5.8-38)$$

где  $\mathbf{Q}$  — полуположительно определенная весовая матрица размерностью  $p \times p$ , а  $\mathbf{R}$  — положительно определенная весовая матрица размерностью  $n \times n$ . Одношаговый рабочий критерий (уравнение (5.8-38)) показывает, что целью оптимального управления является сведение к нулю ошибок манипулятора по положению и по скорости вдоль номинальной траектории при позиционном и скоростном управлении на дискретных интервалах. При этом одновременно достигается качество управления. Вид оптимального управления, минимизирующего функционал (уравнение (5.8-38)) и удовлетворяющего требованиям уравнения (5.8-20), хорошо известен [259]:

$$\mathbf{u}^*(k) = -[\mathbf{R} + \hat{\mathbf{G}}^T(k) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{G}}(k)]^{-1} \hat{\mathbf{G}}^T(k) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{F}}(k) \mathbf{x}(k), \quad (5.8-39)$$

где  $\hat{\mathbf{F}}(k)$  и  $\hat{\mathbf{G}}(k)$  — параметры системы, полученные с помощью алгоритма идентификации (уравнения (5.8-32) — (5.8-34)) в  $k$ -й дискретный момент времени.

Алгоритмы идентификации и управления (уравнения (5.8-32) — (5.8-34) и (5.8-39)) не требуют сложных вычислений. В уравнении (5.8-34)  $[\mathbf{z}^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{z}(k) \rho]$  представляет собой скаляр, поэтому его обращение тривиально. Хотя весовой коэффициент настраивается для каждого вектора  $i$ -го параметра  $\theta_i(k)$ , это требует большого объема вычислений для матрицы  $\mathbf{P}(k+1)$ . Такая настройка нежелательна при реализации управления манипулятором робота в режиме реального времени. Матрица  $\mathbf{P}(k+1)$  вычисляется только один раз на каждом дискретном периоде времени с использованием одного и того же весового коэффициента  $\rho$ . Более того, поскольку  $\mathbf{P}(k)$  — симметрическая положительно определенная матрица, необходимо вычислять только верхнюю диагональную матрицу из  $\mathbf{P}(k)$ . Объединенный алгоритм идентификации и управления может быть реализован за время  $O(n^3)$ . В табл. 5.1 приведены требования

Таблица 5.1. Расчет адаптивного устройства управления

Адаптивное устройство управления	Число операций умножения	Число операций сложения
Уравнение движения Ньютона — Эйлера	$117n - 24$	$103n - 21$
Алгоритм адаптации по методу наименьших квадратов	$30n^2 + 5n + 1$	$30n^2 + 3n - 1$
Алгоритм управления	$8n^3 + 2n^2 + 39$	$8n^3 - n^2 - n + 18$
Итого	$8n^3 + 32n^2 + 5n + 40$	$8n^3 + 29n^2 + 2n + 17$

к вычислению адаптивного управления при наличии возмущений. В соответствии с возможностями ЭВМ DEC PDP 11/45 слож-

ние с плавающей запятой (инструкция ADDF) занимает время 5,17 мкс, а умножение с плавающей запятой (инструкция MULF) — 7,17 мкс. Предположим, что по каждой из указанных инструкций необходимо выбирать данные из машинной памяти дважды при времени выборки 450 нс. Тогда для вычисления моментов на первых трех сочленениях манипулятора робота Пума в основной точке траектории при реализации адаптивного управления по возмущениям требуется примерно 7,5 мс.

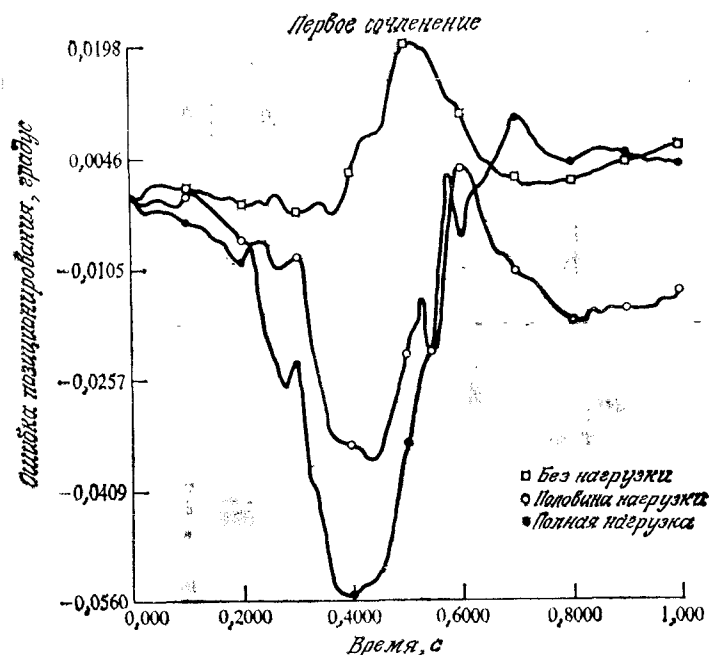


Рис. 5.16. Ошибка позиционирования первого сочленения при различных нагрузках.

Изучение трехзвенного манипулятора робота Пума путем численного моделирования проведено в работах [159, 160]. При этом была оценена работа адаптивного устройства управления и осуществлено сравнение с устройством управления (уравнение (5.3-65)), которое в основном представляет собой пропорционально-дифференциальный регулятор (ПД-управление). Анализ проводился при различных условиях нагружения во время движения по заданной траектории. Была сопоставлена и оценена реализация ПД-управления и адаптивного управления для трех различных условий нагружения. Результаты приведены в табл. 5.2, где в первом случае приведены данные при отсут-

Таблица 5.2. Сравнение ПД-управления и адаптивного управления

Различные условия нагружения	ПД-управление				Адаптивное управление		
	Формирование траектории				Формирование траектории		
	Сочленения	Максимальная ошибка, градус	Максимальная ошибка, мм	Ошибка конечного положения, градус	Максимальная ошибка, градус	Максимальная ошибка, мм	Ошибка конечного положения, градус
Без нагрузки: ошибка в тензоре инерции 10%	1	0,089	1,55	0,025	0,020	0,34	0,000
	2	0,098	1,71	0,039	0,020	0,36	0,004
	3	0,328	2,86	0,121	0,032	0,28	0,002
0,5 максимальной нагрузки: ошибка в тензоре инерции 10%	1	0,121	2,11	0,054	0,045	0,78	0,014
	2	0,147	2,57	0,078	0,065	1,14	0,050
	3	0,480	4,19	0,245	0,096	0,83	0,077
Максимальная нагрузка: ошибка в тензоре инерции 10%	1	0,145	2,53	0,082	0,069	1,20	0,023
	2	0,185	3,23	0,113	0,069	1,22	0,041
	3	0,607	5,30	0,360	0,066	0,58	0,019

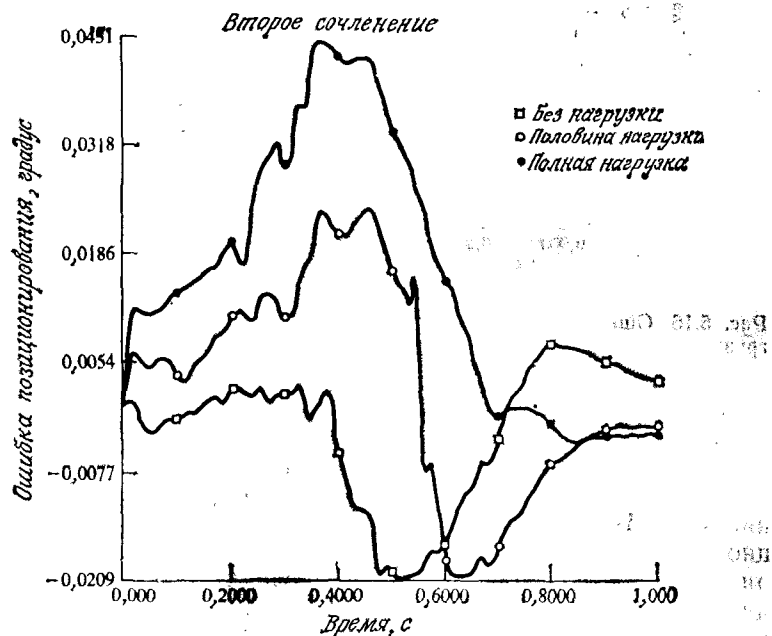


Рис. 5.17. Ошибка позиционирования второго сочленения при различных нагрузках.

ствии нагрузки, во втором случае — при половине максимальной нагрузки, а в третьем случае — при максимальной нагрузке. Во всех случаях ошибка тензора инерции составляла 10%, что означало отклонение его действительного значения от измеренного в пределах  $\pm 10\%$ . Результаты отразили преимущество адаптивного управления по сравнению с ПД-управлением с по-

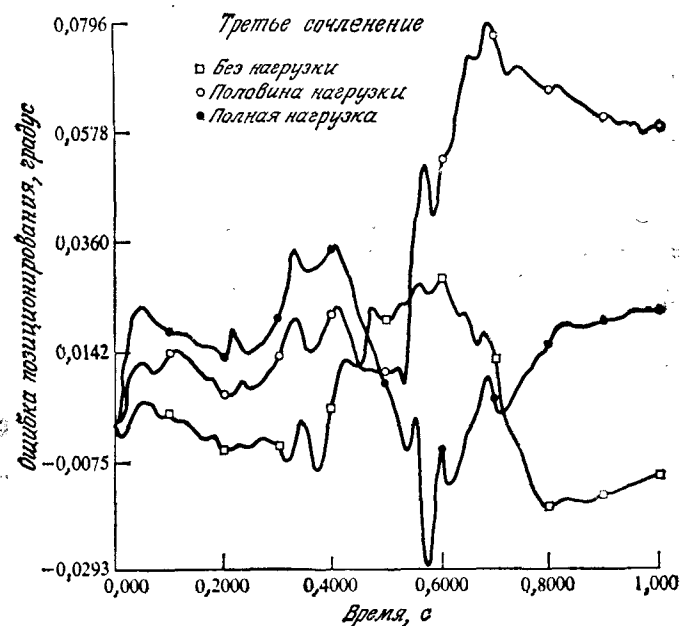


Рис. 5.18. Ошибка позиционирования третьего сочленения при различных нагрузках.

стоянным коэффициентом передачи обратной связи в смысле точности как формирования траектории движения, так и конечного позиционирования. Графики ошибок углового положения при адаптивном управлении для рассмотренных случаев приведены на рис. 5.16—5.18. Более подробно результаты моделирования изложены в [159, 160].

#### 5.8.4. Независимое адаптивное управление движением

Метод адаптивного управления, рассмотренный в разд. 5.8.3 для связанных координат, может быть распространен на случай управления манипулятором в декартовых координатах при различных условиях нагружения с помощью применения принципа независимого управления движением по скорости и ускорению. Независимое адаптивное управление движением формирует дви-

жение конечного звена и основано на использовании линейризованной возмущенной системы, описывающей движение конечного звена вдоль заданной временной траектории. Это управление отличается от независимого управления движением по ускорению минимизацией не только ошибок по положению или ориентации, но и ошибок по угловым и линейным скоростям конечного звена манипулятора вдоль координатных осей конечного звена. Как и для предыдущего метода адаптивного управления, управляемая система характеризуется наличием положительной и отрицательной обратных связей, которые могут определяться одновременно и отдельно. Прямая связь преобразует определенные значения положений, скоростей и ускорений конечного звена в соответствующие значения этих величин для сочленений, с помощью которых вычисляются номинальные моменты в сочленениях, компенсирующие все силы, взаимодействующие между различными сочленениями. В обратной связи формируются моменты в сочленениях, компенсирующие возмущения и уменьшающие ошибки конечного звена манипулятора по положению и скорости вдоль его номинальной траектории. В этом случае также используется рекурсивный алгоритм идентификации по методу наименьших квадратов для определения параметров линейризованной системы в режиме связи с процессором.

Уравнения движения манипулятора в декартовых координатах могут быть легко получены с использованием кинематической связи между связанными с сочленениями координатами и декартовыми координатами, которая была ранее найдена в виде уравнений (5.7-1) — (5.7-14). Ускорение манипулятора определяется уравнением (5.7-13) и имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \dot{N}(q, \dot{q}) N^{-1}(q) \begin{bmatrix} v(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + N(q) \ddot{q}(t). \quad (5.8-40)$$

Для того чтобы отразить динамику манипулятора в этом кинематическом уравнении, необходимо использовать уравнения движения Лагранжа — Эйлера в виде уравнения (3.2-26). Поскольку  $D(q)$  — всегда несингулярна,  $q(t)$  можно получить из уравнения (3.2-26) и после его подстановки в уравнение (5.8-40) определить ускорение конечного звена манипулятора в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \dot{N}(q, \dot{q}) N^{-1}(q) \begin{bmatrix} v(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + N(q) D^{-1}(q) [\tau(t) - h(q, \dot{q}) - c(q)]. \quad (5.8-41)$$

Разобьем для удобства  $N(q)$ ,  $N^{-1}(q)$  и  $D^{-1}(q)$  на подматрицы размерностью  $3 \times 3$ , а  $h(q, \dot{q})$ ,  $c(q)$  и  $\tau(t)$  на подматрицы

размерностью  $3 \times 1$ :

$$N(q) \triangleq \begin{bmatrix} N_{11}(q) & N_{12}(q) \\ N_{21}(q) & N_{22}(q) \end{bmatrix}, \quad (5.8-42a)$$

$$N^{-1}(q) \triangleq K(q) \triangleq \begin{bmatrix} K_{11}(q) & K_{12}(q) \\ K_{21}(q) & K_{22}(q) \end{bmatrix}, \quad (5.8-42b)$$

$$D^{-1}(q) \triangleq E(q) \triangleq \begin{bmatrix} E_{11}(q) & E_{12}(q) \\ E_{21}(q) & E_{22}(q) \end{bmatrix}, \quad (5.8-43a)$$

$$h(q, \dot{q}) \triangleq \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad (5.8-43b)$$

$$c(q) \triangleq \begin{bmatrix} c_1(q) \\ c_2(q) \end{bmatrix}, \quad (5.8-44a)$$

$$\tau(t) \triangleq \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.8-44b)$$

Объединяя уравнения (5.7-4), (5.7-8) и (5.8-41) и используя уравнения (5.8-42) — (5.8-44), получим уравнения состояния манипулятора в декартовых координатах

$$\begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{\Phi}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{\Omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(\Phi) \\ 0 & 0 & \dot{N}_{11}(q, \dot{q}) K_{11}(q) + \dot{N}_{12}(q, \dot{q}) K_{21}(q) & \dot{N}_{11}(q, \dot{q}) K_{12}(q) + \dot{N}_{12}(q, \dot{q}) K_{22}(q) \\ 0 & 0 & \dot{N}_{21}(q, \dot{q}) K_{11}(q) + \dot{N}_{22}(q, \dot{q}) K_{21}(q) & \dot{N}_{21}(q, \dot{q}) K_{12}(q) + \dot{N}_{22}(q, \dot{q}) K_{22}(q) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p(t) \\ \Phi(t) \\ v(t) \\ \Omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{11}(q) E_{11}(q) + N_{12}(q) E_{21}(q) & N_{11}(q) E_{12}(q) + N_{12}(q) E_{22}(q) \\ N_{21}(q) E_{11}(q) + N_{22}(q) E_{21}(q) & N_{21}(q) E_{12}(q) + N_{22}(q) E_{22}(q) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -h_1(q, \dot{q}) - c_1(q) + \tau_1(t) \\ -h_2(q, \dot{q}) - c_2(q) + \tau_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.8-45)$$

где 0 — нулевая матрица размерностью  $3 \times 3$ . Заметим, что самая левая матрица и средние векторы имеют размерность  $12 \times 1$ , левая центральная матрица —  $12 \times 12$ , правая матрица —  $12 \times 6$  и самый правый вектор —  $6 \times 1$ . Уравнение (5.8-45) представляет собой уравнение состояния манипулятора и будет

использовано при получении адаптивного управления в декартовых координатах.

Определяя вектор состояния конечного звена манипулятора в виде

$$\mathbf{x}(t) \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T \triangleq (p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta, \gamma, v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T \triangleq \underline{\underline{\mathbf{p}^T, \Phi^T, \mathbf{v}^T, \Omega^T}}^T, \quad (5.8-46)$$

а вектор входных моментов в виде

$$\mathbf{u}(t) \triangleq (\tau_1, \dots, \tau_6)^T \triangleq (u_1, \dots, u_6)^T, \quad (5.8-47)$$

уравнение (5.8-45) можно записать в пространстве состояний в виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \quad (5.8-48)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $2n$ -мерный вектор,  $\mathbf{u}(t)$  —  $n$ -мерный вектор,  $\mathbf{f}(\cdot)$  — непрерывно дифференцируемая нелинейная вектор-функция размерностью  $2n \times 1$ , а  $n = 6$  — число степеней свободы манипулятора.

Уравнение (5.8-48) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_7(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_8(t), \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_9(t), \\ \dot{x}_4(t) &= f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\sec x_5(x_{10} \cos x_6 + x_{11} \sin x_6), \\ \dot{x}_5(t) &= f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sec x_5(x_{10} \cos x_5 \sin x_6 - x_{11} \cos x_5 \cos x_6), \\ \dot{x}_6(t) &= f_6(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \\ &= -\sec x_5(x_{10} \sin x_5 \cos x_6 + x_{11} \sin x_5 \sin x_6 + x_{12} \cos x_5), \\ \dot{x}_{i+6}(t) &= f_{i+6}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g_{i+6}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{x}(t) + b_{i+6}(\mathbf{q}) \lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + b_{i+6}(\mathbf{q}) \mathbf{u}(t), \end{aligned} \quad (5.8-49)$$

где  $i = 1, \dots, 6$ , а  $g_{i+6}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  есть  $(i+6)$ -я строка матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}(\Phi) \\ 0 & \dot{N}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{11}(\mathbf{q}) + N_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{21}(\mathbf{q}) & \dot{N}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{12}(\mathbf{q}) + \dot{N}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{22}(\mathbf{q}) \\ 0 & \dot{N}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{11}(\mathbf{q}) + \dot{N}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{21}(\mathbf{q}) & \dot{N}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{12}(\mathbf{q}) + \dot{N}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{K}_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix},$$

а  $b_{i+6}(\mathbf{q})$  есть  $(i+6)$ -я строка матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_{11}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{11}(\mathbf{q}) + N_{12}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{21}(\mathbf{q}) & N_{11}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{12}(\mathbf{q}) + N_{12}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{22}(\mathbf{q}) \\ N_{21}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{11}(\mathbf{q}) + N_{22}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{21}(\mathbf{q}) & N_{21}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{12}(\mathbf{q}) + N_{22}(\mathbf{q}) \mathbf{E}_{22}(\mathbf{q}) \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{h}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & -\mathbf{c}_1(\mathbf{q}) \\ -\mathbf{h}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & -\mathbf{c}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}.$$

Уравнение (5.8-49) полностью описывает динамику манипулятора в декартовых координатах. Задачей управления при этом является нахождение закона управления по обратной связи  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t)]$ , который минимизирует ошибку конечного звена при его движении вдоль заданной траектории в широком диапазоне нагрузок. Снова получим соответствующую линеаризованную систему, используя теорию возмущений и разложение в ряд Тейлора в уравнении (5.8-49), и построим управление по обратной связи вдоль желаемой траектории конечного звена. Определение закона управления по обратной связи для линеаризованной системы аналогично определению закона управления в связанных с сочленениями координатах (уравнения (5.8-32) — (5.8-34) и (5.8-39)). Блок-схема независимого адаптивного управления движением показана на рис. 5.19.

Система независимого адаптивного управления движением также характеризуется наличием прямой (программной), а также положительной и отрицательной обратных связей. Это позволяет проводить параллельные вычисления параметров в этих связях. В прямой связи определяются управляющие моменты в сочленениях по следующему алгоритму. Сначала по опорным точкам траектории конечного звена  $\mathbf{p}^d(t)$ ,  $\Phi^d(t)$ ,  $\mathbf{v}^d(t)$ ,  $\Omega^d(t)$  формируются величины требуемых положений, скоростей и ускорений в сочленениях, а затем из уравнения движения Ньютона — Эйлера вычисляются управляющие моменты в сочленениях, организующие траекторию конечного звена. При этом используются сформированные величины положений, скоростей и ускорений в сочленениях. Определенные таким образом моменты представляют собой номинальные моменты  $\mathbf{u}_n(t)$ . В обратной связи вычисляются моменты в сочленениях, компенсирующие возмущения, в соответствии с уравнением (5.8-39) и рекурсивным алгоритмом идентификации по методу наименьших квадратов (уравнения (5.8-32) — (5.8-34)).

Возможность применения адаптивного устройства управления, реализованного на дискретной частоте 60 Гц, и современных недорогих микропроцессоров можно установить путем определения времени вычисления при рассмотрении математических операций умножения и сложения. Предположим, что мультипроцессоры могут производить параллельный расчет управления. Параметры прямой связи, в которой формируются номинальные моменты в сочленениях, организующие заданную траекторию движения конечного звена, могут подсчитываться в четыре последовательных этапа. Это требует в общем случае выполнения 1386 операций умножения и 988 операций сложения для шестизвенного манипулятора. Параметры обратной связи, в которой формируются моменты, компенсирующие возмущения в сочленениях, удобно вычислять в три последовательных этапа. Для шестизвенного манипулятора это требует выполнения примерно



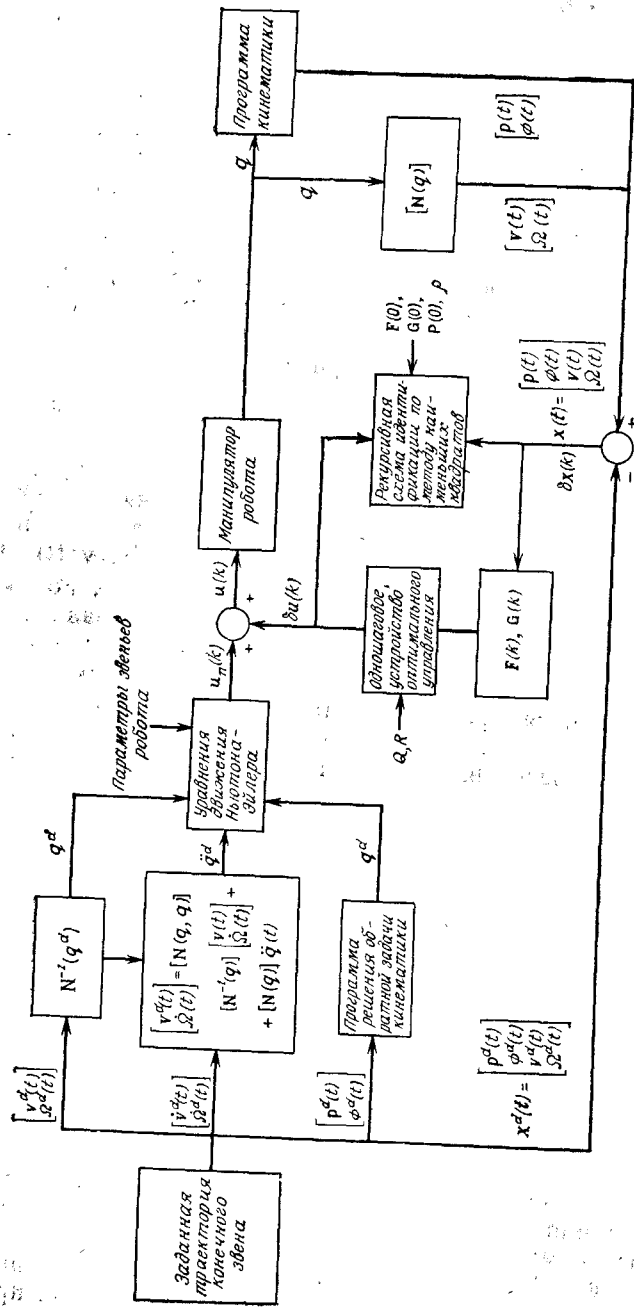


Рис. 5.19. Независимое адаптивное управление движением.

3348 операций умножения и 3118 операций сложения. Поскольку параметры прямой и обратной связей могут вычисляться параллельно, независимое адаптивное управление движением в общем случае требует выполнения 3348 операций умножения и 3118 операций сложения в каждый период дискретизации. Объем вычислений для операций умножения и сложения при адаптивном управлении  $n$ -звенного манипулятора приведен в табл. 5.3.

Таблица 5.3. Вычисление независимого адаптивного управления движением

	Адаптивное управление	Число операций умножения	Число операций сложения
Этап 1	Вычисление $q^d$ (обратная задача кинематики)	(39)	(32)
Этап 2	Вычисление $\dot{q}^d$	$n^2 + 27n + 327$ (525)	$n^2 + 18n + 89$ (233)
Этап 3	Вычисление $\ddot{q}^d$	$4n^2$ (144)	$4n^2 - 3n$ (126)
Этап 4	Вычисление $\tau$	$117n - 24$ (678)	$103n - 21$ (597)
	Общее число операций при вычислениях по прямой связи	$5n^2 + 144n + 342$ (1386)	$5n^2 + 118n + 100$ (988)
Этап 1	Вычисление $(p^T \Phi^T)^T$ Вычисление $(v^T \Omega^T)^T$	(48) $n^2 + 27n - 21$ (177)	(22) $n^2 + 18n - 15$ (129)
Этап 2	Вычисление ошибок конечного звена $[x(k) - x_n(k)]$ Алгоритм идентификации	0 (0) $33n^2 + 9n + 2$ (1244)	24 (12) $34^{1/2}n^2 - 1^{1/2}n$ (1233)
Этап 3	Вычисление адаптивного управления	$8n^3 + 4n^2 + n + 1$ (1879)	$8n^3 - n$ (1722)
	Общее число операций при вычислениях по обратной связи	$8n^3 + 38n^2 + 37n + 30$ (3348)	$8n^3 + 35^{1/2}n^2 + 17^{1/2}n + 7$ (3118)
	Общее число математических операций	$8n^3 + 38n^2 + 37n + 30$ (3348)	$8n^3 + 35^{1/2}n^2 + 17^{1/2}n + 7$ (3118)

Для микропроцессора INTEL 8087 целочисленное умножение занимает 19 мкс, сложение — 17 мкс, а обращение к памяти — 9 мкс. Предполагая, что для каждой операции умножения и сложения требуются два обращения к памяти, вычисление предельного управления займет 233 мс. Такое быстродействие

является недостаточным для работы замкнутой системы. В разд. 5.3.5 было показано, что минимальное быстродействие для дискретной частоты 60 Гц составляет 16 мс.

В микропроцессоре Motorola MC 68000 целочисленное умножение занимает 5,6 мкс, сложение — 0,96 мкс, а обращение к памяти — 0,32 мкс. В этом случае требуемое управление рассчитывается за 26,24 мс, что еще не удовлетворяет требованиям по быстродействию. Наконец, для ЭВМ PDP 11/45 время целочисленного умножения равно 3,3 мкс, время сложения — 300 нс, а обращение к памяти занимает 450 нс. На этой ЭВМ управление можно подсчитать за 18 мс, что удовлетворяет системе, работающей на дискретной частоте  $\sim 55$  Гц. Однако, PDP 11/45 является однопроцессорной ЭВМ и не реализует параллельных вычислений. Этот анализ дает представление о требуемой скорости вычислений адаптивного управления манипулятором.

## 5.9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были рассмотрены различные методы построения систем управления манипулятором робота от простых сервомеханизмов до сложных систем управления, таких, как системы адаптивного управления с алгоритмом идентификации. Рассмотрены методы управления движением звена, независимого управления движением и адаптивного управления. Большинство методов управления сочленением и независимого управления разработаны для конечного звена или для сочленений манипулятора, при этом производится нелинейная компенсация сил реакции между различными сочленениями. Описаны также различные вариации адаптивного управления. Адаптивное управление по заданной модели реализуется просто, но трудно выбрать соответствующую модель и провести анализ устойчивости управляемой системы. Самонастраивающееся адаптивное управление устанавливает соответствие данных по входу и выходу системы с авторегрессивной моделью. Оба метода не учитывают сил реакции между сочленениями, которые могут быть значительными в манипуляторах с шарнирными сочленениями. Адаптивное управление с использованием теории возмущений более пригодно для различных видов манипуляторов, так как в нем учитываются силы взаимодействия между сочленениями. Метод адаптивного управления по возмущениям удобен для управления манипулятором как в связанных с сочленением, так и в декартовых координатах. Система адаптивного управления по возмущению характеризуется наличием прямой и обратной связей, которые могут определяться параллельно — независимо и одновременно. Вычисление адаптивного управления для шестизвенного манипулятора робота реализуется в случае управления в пространстве переменных сочленения с помощью недо-

рогих микропроцессоров. Для независимого адаптивного управления движением нельзя использовать существующие недорогие микропроцессоры, потому что они не удовлетворяют требованиям к быстродействию вычисления параметров управления для стандартной дискретной частоты 60 Гц.

## Литература

Более подробно управление методом вычисления моментов описано в работах [16, 154, 186, 188, 226]. Оптимальное по быстродействию управление рассматривается в работе [140], а оптимальное по быстродействию управление с учетом ограничений на управляющий момент — в работе [25]. В работе [320] обсуждаются построенные управления с переменной структурой для манипулятора. Более общую теорию управления с переменной структурой можно найти в работах [134, 297]. Различные исследования посвящены нелинейному независимому управлению, в том числе работы [75, 86, 94, 118, 126, 258, 280].

Сведения по независимому управлению движением даны в работах [308—310], где рассматривается независимое управление движением по скорости. В работе [186] исследуется управление по ускорению. Недостатком независимого управления движением является большой объем вычислений при обращении якобиана.

Для того чтобы компенсировать изменения параметров манипулятора и переносимого им груза, методы адаптивного управления требуют усовершенствования при работе как в связанных, так и в декартовых координатах. Такие методы управления изложены в работах [64, 126, 150, 159, 160, 161, 165].

Связанной с управлением проблемой является исследование эффективного построения системы управления, обеспечивающего вычисление законов управления с необходимым быстродействием. Этой проблеме посвящены работы [158, 167, 183, 215, 221].

## Упражнения

5.1. Для устройства позиционирования одним звеном, описанного в разд. 5.3.2, найти передаточные функции разомкнутой системы  $\Theta_L(s)/E(s)$  и замкнутой системы  $\Theta_L(s)/\Theta_L^d(s)$ , если управляющее напряжение  $V_a(t)$  прямо пропорционально ошибке позиционирования и скорости изменения выходного углового положения.

5.2. Определите установившуюся ошибку системы на ступенчатое входное воздействие при управляющем напряжении из упр. 5.1. Сделайте то же самое для аналогового входа.

5.3. Сколько требуется операций умножения и сложения на одной опорной точке траектории при использовании метода вычисления моментов, если вычисления управляющих моментов в сочленениях для манипулятора с шестью степенями свободы и с шарнирными сочленениями использовать уравнения движения Ньютона — Эйлера?